PROBLEME DER GEOMETRISCHEN KAUSALITÄT IN KONFORM-INVARIANTEN SYSTEMEN

Go Tjoe-hian

1971

Dissertationsdruck- und Verlagsanstalt
Werner Blasaditsch · 89 Augsburg · Theodor-Heuß-Platz 3 · Tel. (0821) 25563

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546003_0042

PROBLEME DER GEOMETRISCHEN KAUSALITÄT IN KONFORM-INVARIANTEN SYSTEMEN

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Go Tjoe-hian

Oktober 1971

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Berichterstatter: Prof. Dr. H.A. Kastrup

2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: den 15. Dezember 1971.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung und Zusammenfassung.....1

2. Die Kompaktifizierung M_c^4 des Minkowskiraumes M^4.....8
   2.1. Die Kompaktifizierung und die Mannigfaltigkeiten Q_o^5 und Q_o^5/A.....8
   2.2. Die globale topologische Struktur von Q_o^5 und M_c^4.....11
   2.3. Gruppentheoretische Betrachtungen zu Q_o^5 und M_c^4.....12
      2.3.1. Einiges über O(2,4).....12
      2.3.2. Die Wirkungen von $SO^{\uparrow}(2,4)$ auf Q_o^5 und M_c^4.....13
      2.3.3. Die Darstellung von Q_o^5 und M_c^4 als homogene Räume.....15
   2.4. Die physikalische Interpretation der konformen Transformationen und die entsprechende Interpretation für die Punkte aus Q_o^5 und M_c^4.....17

3. Die Tangentialräume $(Q_o^5)_q$, $(M_c^4)_x$ und ihre Dualräume $(Q_o^5)_q^*$ bzw. $(M_c^4)_x^*$ der Mannigfaltigkeit Q_o^5 bzw. M_c^4.....20
   3.1. Die Charakterisierung der Elemente von $(Q_o^5)_q$ und $(Q_o^5)_q^*$.....21
   3.2. Die Charakterisierung der Elemente von $T(M_c^4)$ und $(T(M_c^4))^*$.....24
   3.3. Metrik auf $T(Q_o^5)$ und $T(M_c^4)$.....28
   3.4. Die physikalischen Anwendungen der Tangentialräume und der Vektorfelder.....30
      3.4.1. Die Situation im Minkowskiraum.....30
      3.4.2. Die globale Situation im $T(Q_o^5)$.....32
      3.4.3. Die globale Situation im $T(M_c^4)$.....33
      3.4.4. Die lokale Situation im $T(Q_o^5)$ und $T(M_c^4)$.....39

4. Die Frage der Kausalität in einer konform-invarianten Welt.....41
   4.1. Die Theoreme I und II.....41
   4.2. Die raum-, zeit- bzw. lichtartige Separation auf Q_o^5 und M_c^4 sowie auf den jeweiligen Tangentialräumen..43
      4.2.1. Q_o^5 und $(Q_o^5)_q$.....43
      4.2.2. M_c^4 und $(M_c^4)_x$.....43

4.3. Die Zeitordnung auf Q_o^5 und M_c^4 und auf ihren jeweiligen Tangentialräumen.....47
4.3.1. Die Zeitordnung auf $T_o(Q_o^5)$ und Q_o^5.....47
4.3.2. Die Zeitordnung auf M_c^4 und $(M_c^4)_x$.....48
4.4. Einige Bemerkungen.....52

5. Der Operator auf M_c^4, der dem masselosen Klein-Gordon-Operator im Minkowskiraum entspricht.....53
5.1. Die Gründe der Untersuchung.....53
5.2. Die Analyse.....54
5.2.1. Die Fortsetzbarkeitsbedingung für $f_{\mathscr{R}} \in C^\infty(\mathbb{R}_1^4(\mathscr{R}))$ auf ganz M_c^4.....55
5.2.2. Die Ableitung des Operators auf M_c^4.....56

Literatur.....59

1. Einleitung und Zusammenfassung

Die 15-parametrige konforme Gruppe $C_{15}(a,\Lambda,c,\varrho)$ im Minkowskiraum M^4, der zu einem 4-dimensionalen pseudo-euklidischen Raum $\mathbb{R}_1^4$ mit der Signatur -2 und dem Index 1 homöomorph ist, enthält außer der 10-parametrigen vollen Poincaré-Gruppe $P_{10}(a,\Lambda)$ noch die 1-parametrige Gruppe der Dilatationen

$$D_1(\varrho): x^j \in \mathbb{R}_1^4 \longmapsto \varrho\, x^j \in \mathbb{R}_1^4,\ \varrho \in \mathbb{R}_+,\ j = 0,1,2,3 \qquad (1)$$

sowie die 4-parametrige spezielle konforme Gruppe

$$SC_4(c) = RT(c)R:\ x^j \longmapsto x'^j = (x^j - c^j(x.x))/\sigma(x;c) \qquad (2)$$

wobei
$$R\,x^j = -\,x^j/x.x\ ,\quad x.x := (x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(x^i)^2,\ j = 0,1,2,3,$$
$$T(c)\,x^j = x^j + c^j,\ \sigma(x;c) = 1 - 2c.x + (c.c)(x.x)$$

sind.

Auf der Suche nach möglichen Mitteln zur Beschreibung der Prozesse in der Hochenergiephysik ist die konforme Gruppe wieder aktuell geworden [1]-[4]. Als Raum-Zeit-Symmetriegruppe ist sie die größte Invarianzgruppe, die den Lichtkegel und die Maxwellschen Gleichungen im M^4 invariant läßt. Sie läßt außerdem viele andere Feldgleichungen invariant, die masselosen Teilchen beschreiben, z.B. die der skalaren ϕ^4-Theorie [5]. Parallel hierzu weiß man, daß das Massenspektrum in einer konform-invarianten Theorie (mit kontinuierlicher unitärer Darstellung der konformen Gruppe) nur den Punkt 0 enthält oder kontinuierlich sein muß, weil in einer solchen Theorie gilt:

$$e^{i\alpha D}\, P^2\, e^{-i\alpha D} = e^{-2\alpha} P^2,\quad \varrho = e^{\alpha}\ ,$$

wobei D der selbstadjungierte Generator der Dilatationen und P^2 der Masseoperator sind. Eine Theorie mit kontinuierlichem Massenspektrum ist mit unserer Erfahrungswelt nicht vereinbar, da es z.B. kein Elektron gibt, das ein Vielfaches der üblichen Elektronenruhemasse als seine Ruhemasse besitzt. Der dazu alternative Fall verschwindender Ruhemasse würde zwar für die Anwendungsmöglichkeit der konformen Gruppe des M^4 als Symmetriegruppe in der Hochenergiephysik eine starke Einschränkung bedeuten, man kann ihn aber von dem folgenden Standpunkt aus betrachten: Man hat entweder wirklich nur mit einem System zu tun, das nur masselose Teilchen und (wegen der Dilatationen daher notwendig) dimensions-

lose Kopplungskonstanten enthält, oder es liegt ein System mit massebehafteten Teilchen in sehr hohem Energiezustand vor, deren Ruhemässen aber (im Rahmen der Hochenergiephysik) auf Grund der hohen Energie- und Impulsübertragungen vernachlässigt werden können.

Vereinbar mit diesem letztgenannten Standpunkt ist die Hypothese von Kastrup und Mack [6], wonach eine dilatationsinvariante (skaleninvariante) Theorie existieren soll, die dann zu einer Theorie der starken Wechselwirkung wird , falls man den Mechanismus der Symmetriebrechung durch Hinzufügen eines Masseterms (in der Lagrange-Funktion) in Gang setzt. Diese Idee über Skaleninvarianz in der Hochenergiephysik wurde von vielen Leuten diskutiert und übernommen. Unter den vielen Variationen in der Anwendung dieser Idee [4] ist die Wilsonsche Arbeit [7] besonders interessant: Eine der in seiner Arbeit verwendeten Hypothesen ist die Skaleninvarianz der starken Wechselwirkung für kurze Abstände; als zweite Hypothese wird die Existenz einer Operatorproduktentwicklung zweier (oder mehrerer) lokaler Feldoperatoren A(x) und B(y) für $\|x-y\| \to 0$ ($\|\cdot\|$: euklidische Norm) angenommen:

$$A(x)\,B(y) = \sum_n C_n(x-y)\,O_n(x), \quad \text{für } \|x-y\| \to 0,$$

wobei $C_n(x-y)$ c-Zahldistributionen in (x-y) sind, die z.B. auf dem Lichtkegel Singularitäten der Form $((x-y)^2 - i\varepsilon(x^o-y^o))^{-p}$, $p \in \mathbb{R}$, haben, und $O_n(x)$ lokale Operatoren sind. Die erste Hypothese wird dann dazu benutzt, den Exponenten p der höchsten Singularität zu bestimmen. Andere Autoren [8]-[10] verallgemeinern die Wilsonsche Entwicklung u.a. dadurch, indem sie die Entwicklung nicht mehr für kurze Abstände sondern auf dem ganzen Lichtkegel betrachten. Dies ist u.a. durch die Ergebnisse der bekannten SLAC-Experimente [11] über tief-inelastische e-p-Streuung motiviert. Dabei hat sich nämlich herausgestellt, daß die Strukturfunktionen W_i, die Funktionen von q^2 und ν sind, (q^2:das Quadrat der Impulsübertragung auf das Elektron; $\nu \equiv q.p$: die Energieübertragung auf das Elektron; p: 4er Impuls des Protons), der Bjorkenschen Hypothese beim Bjorkenschen Limes [12] (i.e. $\nu \to \infty$, $q^2 \to -\infty$ bei festem $-q^2/2\nu$) gehorchen, (d.h. es existiert der Limes der dimensionslosen Amplituden νW_2 und W_1). Genau dieses Verhalten wurde aus der Lichtkegelentwicklung unter Benutzung der Hypothese der Skaleninvarianz abgeleitet.

Aus der Gl.(2) sieht man, daß die spezielle konforme Transfor-

mation $SO_4(c)$ auf dem Lichtkegel $x.x = 0$ interessant sein könnte. Insbesondere seitdem man weiß (was rein gruppentheoretisch nicht einzusehen ist), daß für viele Klassen von Feldtheorien (z.B. für alle renormierbaren Lagrange-Theorien mit dimensionslosen Kopplungskonstanten, unter gewissen Voraussetzungen aus der Skaleninvarianz die spezielle konforme Invarianz folgt [13] - [16]. Wenn nämlich $S_\mu(x)$ und $C_{\mu\nu}(x)$ die Dilatation- bzw. speziellen konformen Ströme sind, dann besteht für die oben erwähnten Klassen von Theorien die folgende Beziehung zwischen den Divergenzen dieser Ströme

$$\partial^\mu C_{\mu\nu}(x) = 2\, x_\nu\, \partial^\mu S_\mu(x),$$

so daß der gleiche dynamische Mechanismus, der die Dilatationssymmetrie bricht, auch die spezielle konforme Symmetrie bricht. Daraus sieht man, daß hinsichtlich der dynamischen Relevanz die speziellen konformen Transformationen eine ebenso wichtige Rolle wie die Dilatationen spielen.

Unter anderem aus diesen Gründen scheint es uns durchaus sinnvoll zu sein, die Struktur einer Welt, die die konforme Gruppe als exakte Symmetriegruppe besitzt, zu untersuchen.

Für die Verwirklichung dieses Vorhabens ist angesichts des singulären Verhaltens der speziellen konformen Transformationen auf M^4, wie man aus Gl. (2) ersehen kann, notwendig, eine Erweiterung des Definitionsbereiches für die konforme Gruppe vorzunehmen. Als eine minimale Lösung dafür bietet sich offenbar die "Kompaktifizierung" von M^4 zu M^4_c an. Zur Durchführung dieser Idee orientiert man sich an dem Beispiel der Riemannschen Zahlenkugel. Man verwendet die homogenen Koordinaten und bekommt dann nach einer geeigneten Erweiterung eine 5-dimensionale Mannigfaltigkeit Q^5_0, die in einer 6-dimensionalen trivialen Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^6_2$ (6-dimensionaler pseudo-euklidischer Raum mit Signatur -2 und Index 2) eingebettet ist. Der kompaktifizierte Minkowskiraum M^4_c wird schließlich mit der Mannigfaltigkeit Q^5_0/Δ identifiziert, wobei Δ die multiplikative Gruppe von $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ bedeutet.

Die konforme Gruppe im M^4_c wird in diesem Rahmen (mit $\mathbb{R}^6_2$, Q^5_0 etc.) mit der Faktorgruppe $O(2,4)/Z_2(6)$ identifiziert, wobei $O(2,4)$ die orthogonale Gruppe im 6-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^6_2$ ist, die die nichtentartete Bilinearform im $\mathbb{R}^6_2$

$$k(p,q) := \eta^0\xi^0 + \eta^5\xi^5 - \sum_{i=1}^{4}\eta^i\xi^i \qquad (3)$$

$$p = (\eta^\mu),\quad q = (\xi^\mu) \in \mathbb{R}^6_2,\quad \mu = 0,1,..,5$$

invariant läßt, und $Z_2(6) = \{ 1_6 , -1_6 \}$, ($1_6$: Identität im $\mathbb{R}_2^6$).

Mit diesem M_c^4 wollen wir in unserer Arbeit die Frage der "Kausalität" im Rahmen der konformen Gruppe als Symmetriegruppe untersuchen, d.h. die Frage, ob man konform-invariante raum-, zeit- bzw. lichtartige Abstände sowie eine Zeitordnung für zwei Punkte aus M_c^4 angeben kann.

Auf dem Minkowskiraum M^4 mit der Poincaré-Gruppe als Symmetriegruppe ist die Raum-, Zeit- oder Lichtartigkeit zweier Punkte $x,y \in M^4$ durch $(x - y)^2 < 0$, > 0 oder $= 0$, und die Zeitordnung durch $\mathrm{sign}(x^o - y^o)$ gegeben. Beide Beziehungen sind zwar invariant unter der Wirkung der eigentlichen orthochronen Poincaré-Gruppe $P_{10+}^{\uparrow}$ und der Gruppe der Dilatationen $D_1(\rho)$ (da $\rho \in \mathbb{R}_+$ ist), nicht aber $SO_4(c)$-invariant. Unter der Wirkung der Gruppe $SO_4(c)$ wird nämlich $(x.x)$ auf $(x.x)/\sigma(x;c)$ abgebildet , so daß je nach der Wahl der Parameter c die vorhin raumartig zueinander liegenden Punkte nach der Transformation zeitartig zueinander liegen können und umgekehrt, abgesehen von dem möglichen Nullwerden von $\sigma(x;c)$, wobei die x'^j in Gl.(2) nicht mehr im M^4 definiert sind.

Auf der Mannigfaltigkeit Q_o^5 können wir die entsprechenden Probleme leicht lösen. Dabei benutzt man die konform-invariante Bilinearform $k(p,q)$ und ist daher imstande, eine konform-invariante Notation für Raum-, Zeit- bzw. Lichtartigkeit zweier Punkte p und q aus Q_o^5 vermöge $k(p,q) < 0$, > 0 bzw. $= 0$ anzugeben. Was die konform-invariante Zeitordnung in Q_o^5 betrifft, ist dies ebenfalls kein Problem, weil wir zeigen können, daß die Größe

$$\mathrm{sgn}(\eta^o \xi^5 - \eta^5 \xi^o) \equiv \varepsilon(05) \qquad (4)$$

für $p=(\eta^\mu)$, $q=(\xi^\mu)$ aus $\mathbb{R}_2^6$ mit $k(p,p) \geq 0$, $k(q,q) \geq 0$ und $k(p,q)=0$ unter der Wirkung der Gruppe $O^{\uparrow}(2,4)$ invariant ist. Man kann sie daher hier in Q_o^5 als die konform-invariante Zeitordnung zweier Punkte p und q aus Q_o^5 verwenden, die allerdings wegen der Einschränkung $k(p,q) = 0$ nur lichtartig zueinander sein können.

Für zwei Punkte $x \sim [q] \in Q_o^5/A$ und $y \sim [p] \in Q_o^5/A$ aus dem kompaktifizierten Minkowskiraum $M_c^4 \sim Q_o^5/A$ kann daher die Notation für Raum-, Zeit- und Lichtartigkeit mittels der Bilinearform $k(p,q)$ global (wie in Q_o^5) nur für lichtartige Punkte konform-invariante Bedeutung haben. Aber, die Größe $\varepsilon(05)$ hat als Zeitordnungsfunktion in diesem Faktorraum Q_o^5/A keinen Sinn mehr, noch bevor man über irgendeine (konforme) Transformation spricht, weil sie bez.

der Äquivalenzklasse [q] , die die Elemente von Q_o^5/A darstellen, nicht Repräsentanten-unabhängig ist.

Die wesentliche Idee in dieser Arbeit ist (angesichts der eben erwähnten Schwierigkeit) die Heranziehung der Tangentialräume $(M_c^4)_x$, $x \in M_c^4$, der Mannigfaltigkeit M_c^4 und die der A-invarianten Vektorfelder $\hat{T}(Q_o^5)$ (d.h. wenn $\hat{s}^\mu(q)\partial_\mu \in \hat{T}(Q_o^5)$ ist, dann ist $\hat{s}^\mu(q)$ homogene Funktion in q vom Grad +1) in unserer Untersuchung. Es ist uns gelungen, im lokalen (bzw. globalen) Fall von M_c^4 die zu einem bestimmten Punkt $x \sim [q] \in M_c^4$ raum-, zeit- oder lichtartig (bzw. lichtartig) liegenden Punkte $y \sim [p] \in M_c^4$ mittels der Tangentialraumelemente $\hat{s}^\mu(x)\partial_\mu \in (M_c^4)_x$ (bzw. $\hat{s}^\mu(q)\partial_\mu \in T(Q_o^5)$) zu parametrisieren, (i.e. $y \sim [par(q,\hat{s})]$), so daß man die Raum-, Zeit- und Lichtartigkeit im lokalen Fall mittels $k(\hat{s},\hat{s})$ (und im globalen Fall mittels $k(p,q)$) definieren kann. Dabei benutzt man im lokalen Fall die konform-invariante Eigenschaft $g(\hat{s}^\mu\partial_\mu, \hat{s}^\mu\partial_\mu) = k((\hat{s}^\mu), (\hat{s}^\mu))$ für Tangentialraumelemente, wobei g Metrik auf $\mathbb{R}_5^2 \supset Q_o^5$ ist. Als Zeitordnungsfunktion im M_c^4 verwendet man sowohl im globalen als auch im lokalen Fall anstatt der Größe $\varepsilon(05)$ in Gl.(4) nunmehr die Größe

$$\varepsilon(\hat{s}(q)) := \mathrm{sgn}(\eta^0 \hat{s}^5(q) - \eta^5 \hat{s}^0(q)) \qquad (5)$$

$$q = (\eta^\mu) \in Q_o^5, \quad [q] \sim x \in M_c^4 ,$$

die Repräsentanten-unabhängig ist, weil $\hat{s}^\mu(q)$ homogene Funktion in q vom Grad +1 ist. Sie reduziert sich auf die übliche Zeitordnungsfunktion im M^4, wenn man sich auf $M^4 \subset M_c^4$ beschränkt.

Zusammenfassend können wir folgendes feststellen:

Die lokale kausale Struktur der Mannigfaltigkeit M_c^4 und die Wirkung der konformen Gruppe $O(2,4)/Z_2(6)$ auf M_c^4 ist die gleiche wie die des Minkowskiraumes M^4 und die Wirkung der Poincaré-Gruppe auf M^4. - Wir vermuten daher, daß es für die lokale Wechselwirkung eine nichttriviale konform-invariante Quantenfeldtheorie auf M_c^4 geben könnte, die wir hier allerdings nicht behandeln werden.

Global ist die Situation aber ganz anders: In diesem Fall sind nur die Notation der lichtartigen Separation und die entsprechende Zeitordnung konform-invariante Konzepte, während raumartige und zeitartige Separationen unter der Wirkung der konformen Gruppe vermischt werden können.

Wir wollen unsere Arbeit wie folgt gliedern:

Im Abschnitt 2 sprechen wir zunächst über die Kompaktifizierung vom M^4 zu M_c^4 sowie die Mannigfaltigkeiten Q_o^5 und Q_o^5/A. Nach der Beschreibung der globalen topologischen Strukturen dieser

Mannigfaltigkeiten folgt ein kurzer Abriß über die konforme Gruppe [illegible] sowie ihre Wirkung auf den Mannigfaltigkeiten Q^5_0 und M^4_c. Anschließend werden die Mannigfaltigkeiten Q^5_0 und M^4_c als homogene Räume dargestellt. Mit der physikalischen Interpretation der Elemente aus Q^5_0 und M^4_c wird dieser Abschnitt beschlossen.

Im Abschnitt 3 befassen wir uns mit den Tangentialräumen $(Q^5_0)_q$, $q \in Q^5_0$, $(M^4_c)_x$, $x \in M^4_c$ und ihren Dualräumen $(Q^5_0)^*_q$, $(M^4_c)^*_x$. Die für das bessere Verständnis notwendigen Definitionen werden soweit wie möglich angegeben. Die Resultate werden in Form von Lemmata zusammengefaßt, die im wesentlichen die Elemente der obigen Tangentialräume sowie die der Dualräume charakterisieren. Ein Vergleich der Metriken auf $(R^6_2)_p$, $p \in R^6_2$, $(Q^5_0)_q$, $q \in Q^5_0$, und $(M^4_c)_x$, $x \in M^4_c$, ist im darauffolgenden Teil dieses Abschnittes enthalten. Anschließend werden wir die physikalischen Anwendungen der Tangentialräume und Vektorfelder diskutieren: die Situation auf dem M^4 wird zum späteren Vergleich zuerst beschrieben; die Zusammenhänge zwischen den Punkten der Mannigfaltigkeit und Vektoren der Tangentialräume oder Vektorfelder werden für Q^5_0 und M^4_c zuerst getrennt global und danach zusammen lokal behandelt.

Im Abschnitt 4 werden wir uns mit dem zentralen Problem dieser Arbeit, nämlich dem der Kausalität einer konform-invarianten Welt, mit Hilfe der Resultate des letzten Abschnittes beschäftigen. Zwei dafür wichtige Theoreme werden angegeben. Die Frage der raum-, zeit- oder lichtartigen Separation auf Q^5_0 und M^4_c sowie auf ihren jeweiligen Tangentialräumen werden in Q^5_0 und M^4_c getrennt [illegible]. [illegible] Ordnung auf Q^5_0 und M^4_c scheint uns vorteilhaft zu sein.

Der letzte Teil, der Abschnitt 5, dieser Arbeit befaßt sich mit einem Thema, das zwar inhaltsmäßig mit den beiden letzten Abschnitten nicht viel zu tun hat, dessen Behandlung aber in Anbetracht der Einführung und [illegible] der Mannigfaltigkeiten Q^5_0 und M^4_c in unserer Arbeit ganz natürlich erscheint: Wir geben auf dem kompaktifizierten Minkowskiraum M^4_c einen Differentialoperator an, der dem masselosen Klein-Gordon-Operator im Minkowskiraum M^4 entspricht. Zuerst geben wir einige Motivationen für die Untersuchungen an. Nach den Angaben der notwendigen Definitionen und Lemmata leiten wir die Bedingungen für die Fortsetzbarkeit einer vorhin nur auf dem M^4 definierten Funktion auf ganz M^4_c ab. [illegible] e Operator berechnet und u.a. durch

die Vektorfelder auf M_c^4 dargestellt.

Unsere letzte Bemerkung bezieht sich auf die Notation und die mathematische Sprache: die benutzten Notationen und Definitionen stammen zum größten Teil aus dem Buch von Helgason [17], und ein kleiner Teil aus dem Buch von Wolf [18] und Kobayashi und Nomizu [19]. In der ganzen Arbeit wird die Summationskonvention benutzt, soweit nichts anderes vermerkt ist. Der Begriff "differenzierbar" wird stets im Sinne von "unendlich oft differenzierbar" verwendet. Der Einfachheit halber wurden Formeln, Definitionen und Lemmata fortlaufend nummeriert.

2. Die Kompaktifizierung M_c^4 des Minkowskiraumes M^4.

2.1. Die Kompaktifizierung und die Mannigfaltigkeiten Q_o^5 und Q_o^5/A.

Anlehnend an das Beispiel der Riemannschen Zahlenkugel, wo man mittels der stereographischen Projektion die 2-dimensionale Zahlenebene in eine kompaktifizierte (in den 3-dimensionalen euklidischen Raum eingebettete) 2-dimensionale Riemannsche Zahlenkugel abgebildet hat, gehen wir für unsere Kompaktifizierung ebenfalls zuerst in einen Raum höherer Dimension. Dafür führen wir als 1. Schritt die Koordinaten ($\eta^j, \mathcal{X} \neq 0$) aus $\mathbb{R}^5$ ein, die im Minkowskiraum $M^4 \sim \mathbb{R}_1^4 = \{(x^j),\ j = 0,1,2,3\}$ homogene Koordinaten darstellen sollen:

$$x^j = \eta^j/\mathcal{X} \quad , \quad j = 0,1,2,3, \quad \mathcal{X} \neq 0 \ . \tag{6}$$

$\mathcal{X}$ soll hierbei eine Poincaré-invariante Größe sein, die sich unter den Dilatationen $D(\rho)$ wie $\mathcal{X} \mapsto \rho^{-1}\mathcal{X}$ transformiert, während die anderen 4 dimensionslosen Zahlen η^j sich unter der Wirkung der Gruppe $P_{10+}^{\uparrow}$ wie folgt transformieren mögen:

Translation $T_4(a)$: $\eta^j \mapsto \eta^j + a^j \mathcal{X}$, (7)

eigentliche orthochrone Lorentz-Transformation $L_{6+}^{\uparrow}(\Lambda)$: $\eta^j \mapsto \Lambda_k{}^j \eta^k$, $j = 0,1,2,3$.

Um ferner die speziellen konformen Transformationen $SO_4(c)$ (oder die Transformation mittels reziproker Radien R) in diesem Rahmen behandeln zu können, führen wir als nächsten Schritt eine von η^j und $\mathcal{X}$ abhängige Koordinate λ ein, die durch

$$\eta^j \cdot \eta_j - \mathcal{X}\lambda = 0 \tag{8}$$

definiert ist. Die Transformation mittels reziproker Radien R wirkt dann wie folgt

$$R: \ \eta^j \mapsto \eta^j \ , \ j = 0,1,2,3, \ \mathcal{X} \mapsto -\lambda \ , \ \lambda \mapsto -\mathcal{X} \ . \tag{9}$$

Dementsprechend liefern die speziellen konformen Transformationen $SO_4(c) = RT_4(c)R$ die folgenden Transformationsregeln

$$\eta^j \mapsto \eta^j - c^j\lambda \ , \mathcal{X} \mapsto -2c_j\eta^j + \mathcal{X} + c.c\ \lambda \ , \ \lambda \mapsto \lambda \ . \tag{10}$$

Die Größe λ transformiert sich unter den Dilatationen $D_1(\rho)$ bzw. den Transformationen $T_4(a)$ wie $\lambda \mapsto \rho\lambda$ bzw. $\lambda \mapsto 2a_j\eta^j + a.a\,\mathcal{X} + \lambda$, sie ist invariant unter der Wirkung von $L_{6+}^{\uparrow}(\Lambda)$.

Angesichts der Transformationsregeln (10) von $SC_4(c)$ ist es nunmehr notwendig, den Wertebereich von $\varkappa$ von $\mathbb{R}_0$ auf ganz $\mathbb{R}$ zu erweitern, wenn man den ganzen $\mathbb{R}^4$ als den Wertebereich der Parameter c^j in $SC_4(c)$ haben möchte. Daher wollen wir den Wertebereich von $\varkappa$ von $\mathbb{R}_0$ auf $\mathbb{R}$ erweitern. Die Hauptachsentransformation

$$\eta^j \mapsto \eta^j \ , \quad \varkappa \mapsto \eta^4 - \eta^5 \equiv \varkappa \ , \quad \lambda \mapsto \eta^4 + \eta^5 \equiv \lambda \qquad (11)$$

ergibt dann eine der Gl.(*) äquivalente Beziehung für $(\eta^\mu) \in \mathbb{R}^5$, $\mu = 0,1,\ldots,5$,

$$(\eta^0)^2 - \sum_{i=1}^{4} (\eta^i)^2 + (\eta^5)^2 = 0. \qquad (12)$$

Die Gesamtheit der durch die Gl.(12) charakterisierten Punkte im $\mathbb{R}^6_2$ bildet eine total-isotrope 5-dimensionale Teilmenge vom $\mathbb{R}^6_2$, die wir Q^5 nennen wollen. Was wir unter der "Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^4$ zu $\mathbb{R}^4_c$" verstehen wollen, wird hier als 4.Schritt vollzogen. Dafür geben wir zunächst die Definition der Mannigfaltigkeit an:

Definition (13)

Sei M ein Hausdorffscher Raum. Eine differenzierbare Struktur von M der Dimension m ist eine Kollektion von offenen Karten $(U_\alpha , \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ auf M, wobei I Indexmenge ist und $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ sind, mit

i) $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

ii) Für beliebige $\alpha , \beta \in I$ ist die Abbildung

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\text{auf}} \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

differenzierbar. (Die beiden Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ und (U_β, φ_β) heißen dann verträglich.)

iii) Die Kollektion $(U_\alpha , \varphi_\alpha)_{\alpha \in I}$ ist eine maximale Familie von offenen Karten, so daß i) und ii) gelten.

Hierbei bemerken wir, daß die Bedingung iii) nicht unbedingt zu stellen ist, da sie aus der Gültigkeit von i) und ii) immer durch eine Vergrößerung der verträglichen Karten erfüllt werden kann.

Definition (14)

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (oder C^∞-Mannigfaltigkeit) der Dimension m ist ein Hausdorffscher Raum mit einer differenzierbaren Struktur der Dimension m.

Die total-isotrope Teilmenge

$$Q_0^5 := Q^5 \setminus \{0\} = \{ o = (\eta^\mu) \in \mathbb{R}^6_2 \setminus \{0\} : k(o,o) = 0 \} \qquad (15)$$

des pseudo-euklidischen Raumes $\mathbb{R}^6_0 \equiv \mathbb{R}^6_2 \setminus \{0\}$ wird mit der Rela-

tivtopologie von $\mathbb{R}_o^6$ versehen, (wobei $\mathbb{R}_o^6$ die übliche euklidische Topologie haben möge), wodurch Q_o^5 ein Hausdorffscher Raum wird. Eine (vollständige) differenzierbare Struktur in diesem Hausdorffschen Raum Q_o^5 kann aus den folgenden 4 lokalen Karten bestehen:

$$\{(\hat{N}_\alpha^5, \varphi_\alpha) : \alpha \in Z\}, \quad Z := \{\varkappa, \lambda, \tilde{\varkappa}, \tilde{\lambda}\} \tag{16}$$

wobei $\varkappa(\eta) := \eta^4 - \eta^5$, $\lambda(\eta) := \eta^4 + \eta^5$, $\tilde{\varkappa}(\eta) := \eta^1 - \eta^0$, $\tilde{\lambda}(\eta) := \eta^1 + \eta^0$,

$$\hat{N}_\alpha^5 := \{\eta \in Q_o^5 : \alpha(\eta) \neq 0\}, \quad \alpha \in Z,$$

und die Homöomorphismen $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in Z}$ durch

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_\varkappa &: \hat{N}_\varkappa^5 \ni (\eta^j, \varkappa \neq 0, \lambda = \tfrac{\eta^i \eta_i}{\varkappa}) \mapsto (\eta^j, \varkappa \neq 0) \in N_\varkappa^5 \subset \mathbb{R}^5(\varkappa) \\
\varphi_\lambda &: \hat{N}_\lambda^5 \ni (\eta^j, \lambda \neq 0, \varkappa = \tfrac{\eta^i \eta_i}{\lambda}) \mapsto (\eta^j, \lambda \neq 0) \in N_\lambda^5 \subset \mathbb{R}^5(\lambda)
\end{aligned}\right\} j=0,1,2,3$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{\tilde{\varkappa}} &: \hat{N}_{\tilde{\varkappa}}^5 \ni (\eta^j, \tilde{\varkappa} \neq 0, \tilde{\lambda} = \tfrac{\eta^i \eta_i}{\tilde{\varkappa}}) \mapsto (\eta^j, \tilde{\varkappa} \neq 0) \in N_{\tilde{\varkappa}}^5 \subset \mathbb{R}^5(\tilde{\varkappa}) \\
\varphi_{\tilde{\lambda}} &: \hat{N}_{\tilde{\lambda}}^5 \ni (\eta^j, \tilde{\lambda} \neq 0, \tilde{\varkappa} = \tfrac{\eta^i \eta_i}{\tilde{\lambda}}) \mapsto (\eta^j, \tilde{\lambda} \neq 0) \in N_{\tilde{\lambda}}^5 \subset \mathbb{R}^5(\tilde{\lambda})
\end{aligned}\right\} j=5,4,2,3 \tag{17}$$

gegeben sind. Man überzeugt sich, daß die Verträglichkeitsrelation von den obigen vier Karten erfüllt werden. Die gewissen Koordinaten (η^k) von Q_o^5 stehen nunmehr mittels der Gl.(6) mit den Koordinaten (x^i) von $\mathbb{R}_1^4 \sim M^4$ in Beziehung. Es besteht m.a.W. eine eineindeutige Relation zwischen der Teilmenge

$$\{[\eta]_A : \varkappa(\xi) \neq 0 \text{ für } \xi \in [\eta]_A\}$$

der Äquivalenzklassen $\{[\eta]_A\}$ in $\mathbb{R}_o^6$,

$$[\eta]_A := \{(\eta_i') \in \mathbb{R}_o^6 \mid \eta_1 \overset{A}{\sim} \eta_2 \iff \eta_1' = r\,\eta_2, \; r \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \equiv \mathbb{R}_o\} \tag{18}$$

und dem Raum $\mathbb{R}_1^4 \sim M^4$. Die Mannigfaltigkeit, die man aus der Mannigfaltigkeit Q_o^5 mittels der Projektion $\hat{\pi}$,

$$\hat{\pi} : Q_o^5 \to Q_o^5/A = \{[\eta]_A\} \equiv \hat{\Omega} \tag{19}$$

gewonnen hat, wird als die "Kompaktifizierung M_c^4" von M^4 bezeichnet. (Die Äquivalenzrelation A ist gruppentheoretisch mit der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}_o$ identisch.) Man versieht dabei die Faktormenge Q_o^5/A mit der Quotiententopologie von Q_o^5 bezüglich der Abbildung $\hat{\pi}$, um sie zu einem Hausdorffschen Raum zu machen. Die Abbildung $\hat{\pi}$ besteht aus einer Familie von Abbildungen $\{\hat{\pi}_\alpha, \alpha \in Z\}$. Die (vollständige) differenzierbare Struktur der Mannigfaltigkeit M_c^4 ist aus der entsprechenden (vollständigen) differenzierbaren Struktur der Mannigfaltigkeit Q_o^5 durch die Projektion $\hat{\pi}$ zu gewinnen:

$$\{(\hat{\pi}(\hat{N}_\alpha^5) \equiv \hat{\Omega}_\alpha, \Psi_\alpha) : \alpha \in Z\}, \tag{20}$$

wobei

$$\Psi_\alpha = \pi_\alpha \circ \varphi_\alpha \circ \hat{\pi}_\alpha^{-1} : [\eta] \in \hat{\pi}_\alpha(\hat{N}_\alpha^5) \mapsto x_\alpha^j := \eta^j/\eta_\alpha \in \Psi_\alpha(\hat{N}_\alpha^5/A) \equiv \mathbb{R}_1^4(\alpha), \quad (20)$$

und

$$j = \begin{cases} 0,1,2,3 \\ 5,4,2,3 \end{cases} \quad \text{für} \quad \alpha = \begin{cases} \mathfrak{X} \text{ oder } \lambda \\ \hat{\mathfrak{X}} \text{ oder } \hat{\lambda} \end{cases}$$

sind. Den üblichen Minkowskiraum M^4 haben wir hierbei mit $\mathbb{R}_1^4(\mathfrak{X})$ identifiziert, dessen Urbild bezüglich der Abbildung $\Psi_\mathfrak{X} \circ \hat{\pi}_\mathfrak{X}$ (bzw. $\Psi_{\hat{\mathfrak{X}}}$) in Q_o^5 (bzw. M_c^4) $\hat{N}_\mathfrak{X}^5$ (bzw. $\hat{N}_\mathfrak{X}^5/A = \{[\eta] : \eta^\mathfrak{X}(\xi) \neq 0$ für $\xi \in [\eta]_x\} \equiv \hat{\Omega}_\mathfrak{X}$) ist.

Zusammenfassend haben wir das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Q_o^5 = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{Z}} \hat{N}_\alpha^5 & \xrightarrow{\hat{\pi}_\alpha} & Q_o^5/A = \hat{\Omega} = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{Z}} \hat{\Omega}_\alpha \sim M_c^4 \\ \downarrow \varphi_\alpha & & \downarrow \Psi_\alpha \\ \varphi_\alpha(\hat{N}_\alpha^5) \equiv N_\alpha^5 \subset \mathbb{R}^5 & \xrightarrow{\pi_\alpha} & \Psi_\alpha(\hat{N}_\alpha^5/A) \equiv \Omega_\alpha \sim \mathbb{R}_1^4(\alpha) \end{array} \quad (21)$$

Die physikalische und geometrische Interpretation von Q_o^5 bzw. M_c^4 wollen wir erst weiter unten behandeln. Wir untersuchen zunächst die globale topologische Struktur und dann ihre gruppentheoretische Darstellung als homogene Räume. Der Index "c" in M_c^4 soll dabei auf die Kompaktifizierung hinweisen.

2.2. Die globale topologische Struktur von Q_o^5 und M_c^4.

Die Koordinaten η^μ ($\mu = 0,1,..,5$) von $q \in Q_o^5$ genügen der Beziehung

$$(\eta^0)^2 + (\eta^5)^2 = \sum_{i=1}^4 (\eta^i)^2 \; . \quad (12)$$

Daraus sieht man sofort,

$$Q_o^5 \sim S^1 \times S^3 \times \mathbb{R}_+, \quad (22)$$

wobei S^n die n-dimensionale Einheitssphäre bedeutet. Q_o^5 ist also nicht beschränkt und damit nichtkompakt in der Relativtopologie von Q_o^5 bezüglich $\mathbb{R}_o^6$.

Der kompaktifizierte Minkowskiraum M_c^4 ist mit einer ähnlichen Beziehung wie Gl.(12) als isomorph zu

$$(S^1 \times S^3)/Z_2(6) \quad (23)$$

zu erkennen. Um dies einzusehen, kann man o.E. diejenigen Repräsentanten $(\eta^\mu) \in [\eta]$ mit

$$(\eta^0)^2 + (\eta^5)^2 = \sum_{i=1}^4 (\eta^i)^2 = 1$$

heranziehen. Aus dieser Isomorphie ist die Kompaktheit von M_c^4 ersichtlich.

$S^1 \times S^3$ ist eine kompakte 2-fache Überlagerung von M_c^4, während $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times S^3$ bzw. $\mathbb{R} \times S^3$ die nichtkompakte universelle Überlagerung für Q_o^5 bzw. für M_c^4 darstellt.

Bezüglich der Anzahl der Q_o^5 überdeckenden Karten ist folgendes zu sagen: Bekanntlich kann eine kompakte Mannigfaltigkeit niemals mit einem vollständigen Atlas überdeckt werden, der nur aus einer einzigen Karte besteht. Da sowohl S^1 als auch S^3 kompakte Untermannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^4$ sind, ist die Mindestzahl der Karten für die mengentheoretische Überdeckung von Q_o^5 und M_c^4 gleich vier. In der Tat reichen die vier Karten

$$\{(\hat{\Omega}_\alpha^5, \varphi_\alpha): \alpha \in Z\} \quad \text{bzw.} \quad \{(\hat{\Omega}_\alpha, \psi_\alpha): \alpha \in Z\}$$

zur vollständigen Überdeckung von Q_o^5 bzw. M_c^4 aus. Jede dieser Karten liegt dicht in Q_o^5 bzw. M_c^4, wie man leicht feststellen kann. Es folgt somit, daß jeder endliche Durchschnitt dieser Karten ebenfalls dicht in dem betreffenden Raum liegt, da Q_o^5 und M_c^4 mit der entsprechenden Topologie vollständige metrische Räume sind. (Vgl.Baireschen Kategoriesatz.)

2.3. Gruppentheoretische Betrachtungen zu Q_o^5 und M_c^4.

2.3.1. Einiges über O(2,4)

Bevor wir die Darstellung von Q_o^5 und M_c^4 als homogene Räume angeben, wollen wir die damit zusammenhängende konforme Gruppe O(2,4) näher betrachten.

Seien $w = (w^\mu{}_\nu) \in O(2,4)$, $g = (g_{\mu\nu})$ mit $g_{00} = g_{55} = -g_{11} = \ldots = -g_{44} = +1$, $g_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$, und $p = (\eta^0, \ldots, \eta^5)$, $q = (\xi^0, \ldots, \xi^5) \in \mathbb{R}_o^6$. Dann läßt w die Bilinearform $k(p,q) = g_{\mu\nu}\eta^\mu\xi^\nu$ invariant: $k(wp,wq) = k(p,q)$. Daraus folgt, $w^T g w = g$, wobei w^T die transponierte Matrix von w ist. Die reelle Gruppe O(2,4) enthält ähnlich wie die reelle volle Lorentz-Gruppe die folgenden vier Zusammenhangskomponenten [20]:

$$SO^\uparrow(2,4): \det(w) = +1, \ \operatorname{sgn}(w^0{}_0 w^5{}_5 - w^0{}_5 w^5{}_0) = \varepsilon_{05} = +1,$$
$$SO^\downarrow(2,4): \det(w) = +1, \ \varepsilon_{05} = -1,$$
$$O_-^\uparrow(2,4): \det(w) = -1, \ \varepsilon_{05} = +1,$$
$$O_-^\downarrow(2,4): \det(w) = -1, \ \varepsilon_{05} = -1.$$

Die Gruppe SO(2,4), die $SO^\uparrow(2,4)$ und $SO^\downarrow(2,4)$ als ihre zwei Zusam-

menhangskomponente hat, ist eine abgeschlossene Untergruppe von GL(6,ℝ) und daher eine Lie-Gruppe[21]. Die Lie-Algebra von SO(2,4), $\mathfrak{so}(2,4)$, ist Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(6,\mathbb{R})$. Es gilt $X \in \mathfrak{so}(2,4)$ genau dann, wenn $e^{rX} \in SO(2,4)$ für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt. Es folgt dann mit $w = e^{X} \in SO(2,4)$ aus $w^T g\, w = g$ und $(e^X)^T = e^{X^T}$, daß $X \in \mathfrak{so}(2,4)$ dann und nur dann gilt, wenn $X^T g = -g \cdot X$ gilt. M.a.W.

$$\mathfrak{so}(2,4) = \left\{ X \;\middle|\; X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{pmatrix}; \begin{array}{l} X_1 \text{ und } X_3 \text{ sind 2x2- bzw. 4x4-} \\ \text{schiefsymmetrische, } X_2 \text{ belie-} \\ \text{bige 2x4-Matrix.} \end{array} \right\}^{[22]}.$$

$\mathfrak{so}(2,4)$ ist die reelle Form von $\mathfrak{so}(6,\mathbb{C})$ und damit einfach. Es folgt daher per Definition[23], daß SO(2,4) einfach und somit halbeinfach ist. Hieraus folgt, daß die maximalkompakten Untergruppen von $SO^{\uparrow}(2,4)$ unter den inneren Automorphismen zu SO(2)x SO(4) konjugiert sind[24]. Ferner ersieht man aus der Homöomorphie[25]

$$SO^{\uparrow}(2,4) \sim SO(2) \times SO(4) \times \mathbb{R}^8$$

bzw.

$$SO^{\downarrow}(2,4) \sim SO(2) \times SO(4) \times \mathbb{R}^8,$$

daß $SO^{\uparrow}(2,4)$ bzw. $SO^{\downarrow}(2,4)$ nicht beschränkt und somit nichtkompakt sind. Was den Zusammenhang betrifft, kann man aus dem ∞-fachen bzw. 2-fachen Zusammenhang von SO(2) bzw. SO(4) den ∞-fachen Zusammenhang von $SO^{\uparrow}(2,4)$ und $SO^{\downarrow}(2,4)$ folgern. SU(2,2) ist eine Überlagerungsgruppe von O(2,4)[26]. Ihre Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2,2)$ ist nicht nur zu der bekannten Dirac-Algebra, sondern auch zu der reellen Form der $\mathfrak{so}(2,4)$ isomorph.

2.3.2. Die Wirkungen von $SO^{\uparrow}(2,4)$ auf Q_o^5 und M_c^4.

Explizit kann man eine Darstellung der 15-parametrigen Gruppe $SO^{\uparrow}(2,4)$ mit $(w^{\mu}{}_{\nu})$: $q = (\eta^0, .., \eta^5) \mapsto q' = (\eta'^0, .., \eta'^5)$ auf Q_o^5 wie folgt angeben[1]:

$$D_1(\varrho) = \begin{pmatrix} 1_4 & & 0 \\ & (\varrho^2+1)/2\varrho & (\varrho^2-1)/2\varrho \\ 0 & (\varrho^2-1)/2\varrho & (\varrho^2+1)/2\varrho \end{pmatrix} \qquad L^{\uparrow}_{6+}(\Lambda) = \begin{pmatrix} \Lambda^{\mu}{}_{\nu} & & 0 \\ & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Parameter ϱ in den Dilatationen $D_1(\varrho)$ ist aus $\mathbb{R}_+$ und mit $(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})$ wurden die Elemente der orthochronen eigentlichen Lorentz-Transformationen im $\mathbb{R}^4_1$ bezeichnet. Die Translationen $T_4(a)$ und die speziellen konformen Transformationen $SC_4(c)$ sind gegeben durch

$$T_4(a)=\begin{pmatrix} & & a^0 & -a^0 \\ & \mathbf{1}_4 & a^1 & -a^1 \\ & & a^2 & -a^2 \\ & & a^3 & -a^3 \\ a_0\ a_1\ a_2\ a_3 & & \frac{a.a+2}{2} & \frac{-a.a}{2} \\ a_0\ a_1\ a_2\ a_3 & & \frac{a.a}{2} & \frac{2-a.a}{2} \end{pmatrix} \quad SC_4(c)=\begin{pmatrix} & & -c^0 & -c^0 \\ & \mathbf{1}_4 & -c^1 & -c^1 \\ & & -c^2 & -c^2 \\ & & -c^3 & -c^3 \\ -c_0\ -c_1\ -c_2\ -c_3 & & \frac{c.c+2}{2} & \frac{c.c}{2} \\ c_0\ c_1\ c_2\ c_3 & & \frac{-c.c}{2} & \frac{2-c.c}{2} \end{pmatrix}$$

Die Transformation mittels reziproker Radien R ist bezüglich der oben verwendeten Basis gegeben durch

$$R = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_4 & & 0 \\ & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sie gehört nicht zu $SO^{\uparrow}(2,4)$ und bewirkt eine diskrete Transformation im $\mathbb{E}_2^5$. Die ganze Lie-Algebra der konformen Gruppe kann aus den Elementen der Lie-Algebra zu $T_4(a)$ (oder $SC_4(c)$) und dem inneren Automorphismus der Lie-Algebra der konformen Gruppe R erzeugt werden [27].

Aus den obigen Darstellungen sieht man, daß $SO^{\uparrow}(2,4)$ auf Q_o^5 linear und somit stetig wirkt. Für jede der obigen vier Untergruppen lautet die Kompositionsregel genau wie im üblichen Minkowskiraum, nämlich:

$$T_4(a_1+a_2) = T_4(a_1).T_4(a_2), \quad L_{6+}^{\uparrow}(\Lambda_1.\Lambda_2) = L_{6+}^{\uparrow}(\Lambda_1).L_{6+}^{\uparrow}(\Lambda_2),$$
$$SC_4(c_1+c_2) = SC_4(c_1).SC_4(c_2), \quad D_1(\varrho_1.\varrho_2) = D_1(\varrho_1).D_1(\varrho_2).$$

Die Darstellungen $T_4(a)$ und $SC_4(c)$, die definitionsgemäß homomorphes Bild der additiven Untergruppe von $SO^{\uparrow}(2,4)$ sind, haben daher die Halbgruppeneigenschaft bezüglich ihren Parametern (a^j) bzw. (c^j) aus $\mathbb{E}^4$.

Die Wirkung von $O(2,4)$ auf M_c^4 ist anders als die auf Q_o^5. Sie ist nur fast-effektiv, da $Z_2(6)$ wie die Identitätstranformation auf M_c^4 wirkt. M.a.W., $Z_2(6)$ stellt einen diskreten Kern der differenzierbaren Wirkung der Lie-Transformationsgruppe (vgl.Def.(27) unten) $SO^{\uparrow}(2,4) \subset O(2,4)$ auf der Mannigfaltigkeit M_c^4 dar. Unter der konformen Gruppe $G_{15}(a,\Lambda,c,\varrho)$ auf dem Raum M_c^4 verstehen wir daher im folgenden die Faktorgruppe $O(2,4)/Z_2(6)$.

Mit der oben angegebenen Darstellung von $w \in SO^{\uparrow}(2,4)$ hat die differenzierbare Wirkung $\tilde{w} \in SO^{\uparrow}(2,4)/Z_2(6)$ auf M_c^4 in lokalen Koordinaten folgende Form:

$$\begin{array}{ccc} \eta \in \hat{M}^5_\alpha & \xrightarrow{w_{\alpha\beta} \in SO^\uparrow(2,4)/Z_2(6) \subset SO^\uparrow(2,4)} & \eta' \in \hat{M}^5_\beta \\ \downarrow \Psi_\alpha \circ \hat{\pi}_\alpha & & \downarrow \Psi_\beta \circ \hat{\pi}_\beta \\ (\eta^j/\alpha) \in \Omega_\alpha & \xrightarrow{\tilde{w}_{\alpha\beta} \in SO^\uparrow(2,4)/Z_2(6)} & (\eta'^j/\beta') \in \Omega_\beta \end{array} \qquad (24)$$

Daraus ersieht man: Durch die Einführung von M^4_c ist es möglich, die vorhin in dem gewöhnlichen Minkowskiraum nicht wohldefinierten speziellen Transformationen

$$\tilde{w}_{\alpha\beta}(SO_4(c))\Big|_{\alpha=\beta=\alpha} : x^j = \eta^j/\alpha \mapsto (x^j - c^j(x.x))/(1-2c.x+(x.x)c.c)$$

mittels $(\Psi_\beta \circ \hat{\pi}_\beta) \circ w_{\alpha\beta} \circ (\Psi_\alpha \circ \hat{\pi}_\alpha)^{-1}$ zu wohldefinierten Transformationen $\tilde{w}_{\alpha\beta}(SO_4(c))$, $\alpha, \beta \in Z$, auf ganz M^4_c zu erklären. Man überzeugt sich dabei, daß wegen der Linearität von $w_{\alpha\beta}$ die Definition

$$\tilde{w}_{\alpha\beta} := (\Psi_\beta \circ \hat{\pi}_\beta) \circ w_{\alpha\beta} \circ (\Psi_\alpha \circ \hat{\pi}_\alpha)^{-1} \qquad (25)$$

sinnvoll ist, d.h. die Wirkung von $\tilde{w}$ ist unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten $(\eta') \in [\eta]_{\sim x}$.

2.3.3. Die Darstellung von Q^5_o und M^4_c als homogene Räume.

Zum besseren Verständnis geben wir die folgenden Definitionen an:

Definition [28] (26)

Sei M ein Hausdorffscher Raum und G eine topologische Gruppe. G heißt topologische Transformationsgruppe, wenn jedes $g \in G$ einen Homöomorphismus von M auf M darstellt: $p \in M \mapsto g.p \in M$ mit

i) $g_1 g_2 .(p) = g_1 .(g_2 .p)$,

ii) $(g,p) \in G \times M \longmapsto g.p \in M$ ist stetig und surjektiv.

Definition [28] (27)

Sei G eine Lie-Gruppe und M eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Zusätzlich sei G topologische Transformationsgruppe von M. G heißt Lie-Transformationsgruppe von M, wenn die Abbildung in (26)ii) differenzierbar ist.

Wenn eine Lie-Transformationsgruppe G transitiv auf einer Mannigfaltigkeit M wirkt, dann ist M darstellbar als ein homogener Raum: Sei $p \in M$ und sei die Untergruppe G_p von G die Isotropiegruppe von G bezüglich p, i.e. $\hat{g}(p)=p$ für alle $\hat{g} \in G_p$, dann gilt $(g.G_p)(p) = g(p)$ für alle $g \in G$. Aus der Transitivität der Lie-Transformationsgruppe G in M folgt somit, daß die Abbildung $g.G_p \mapsto g(p)$ ein Diffeomorphismus von G/G_p auf M ist. Man hat

also $G/G_p \sim M$, wobei G/G_p u.a. mit der Quotiententopologie versehen ist. Wir bemerken ferner die Abgeschlossenheit von G_p in G, die einfach aus der Definition (26) folgt.

Wie man verifizieren kann [illegible], wirkt die Einheitskomponente $SO^{\uparrow}(2,4)$ von $O(2,4)$ transitiv und differenzierbar [illegible] auf der zusammenhängenden Mannigfaltigkeit Q_o^5. Die Isotropiegruppe des Punktes

$$q_1 = (\eta^j=0,\ \varkappa\neq 0,\ \lambda=0) \quad (\text{bzw. } q_2 = (\eta^j=0,\ \varkappa=0,\ \lambda\neq 0))$$

von Q_o^5 ist die Untergruppe

$$L_{6+}^{\uparrow}(\Lambda) \circledS SC_4(c) \qquad (\text{bzw. } L_{6+}^{\uparrow}(\Lambda) \circledS T_4(a)).$$

Q_o^5 ist also darstellbar als

$$SO^{\uparrow}(2,4)/\{L_{6+}^{\uparrow}(\Lambda) \circledS SC_4(c)\} \quad (\text{bzw. } SO^{\uparrow}(2,4)/\{L_{6+}^{\uparrow}(\Lambda) \circledS T_4(a)\})$$

Man kann ebenfalls verifizieren [30], daß $A^+(6) \times SO(2) \oplus SO(4)$ transitiv auf Q_o^5 wirkt, wobei $A^+(6)$ die positive multiplikative Gruppe im $\mathbb{R}^6$ ist, und daß q_1 und q_2 Fixpunkte bezüglich der maximalkompakten Untergruppe $\mathbf{1}_o \oplus SO(3) \oplus \mathbf{1}_{45}$ von $A^+(6) \times SO(2) \oplus SO(4)$ sind. Es gilt daher

$$Q_o^5 \sim (A^+(6) \times SO(2) \oplus SO(4))/(\mathbf{1}_o \oplus SO(3) \oplus \mathbf{1}_{45}).$$

Im Rahmen der Faserbündel-Theorie wird der homogene Raum M als Basisraum eines Hauptfaserbündels [31] $P(M,G)$ angesehen, wobei die Isotropiegruppe G von $M \sim P/G$ als sog. Strukturgruppe bezeichnet wird. Mann kann zeigen, daß die Strukturgruppe G auf ihre maximalkompakte Untergruppe reduzierbar ist, falls M parakompakt ist und G eine zusammenhängende Lie-Gruppe ist [32]. Das Hauptfaserbündel $(A^+(6) \times SO(2) \oplus SO(4))$ $(Q_o^5,\ \mathbf{1}_o \oplus SO(3) \oplus \mathbf{1}_{45})$ ist somit die Reduktion [29] des Hauptfaserbündels $SO^{\uparrow}(2,4)$ $(Q_o^5,\ L_{6+}^{\uparrow}(\Lambda) \circledS T_4(a))$ bzw. $SO^{\uparrow}(2,4)$ $(Q_o^5,\ L_{6+}^{\uparrow}(\Lambda) \circledS SC_4(c))$.

Die Darstellung von M_c^4 als homogener Raum erfolgt analog. Hier wirkt allein $SO(2) \times SO(4)$ schon transitiv auf M_c^4. Die Isotropiegruppe des Punktes q_2 ist $\{L_{6+}^{\uparrow}(\Lambda) \times$ [illegible] $\circledS$ [illegible]$(a)\} \times Z_2(6) = G_{c_2}$. Es folgt daher $M_c^4 \sim SO^{\uparrow}(2,4)/G_{c_2}$. Da die maximalkompakte Untergruppe der obigen Strukturgruppe (hier ist sie identisch mit G_{c_2}) $(\mathbf{1}_o \oplus SO(3) \oplus \mathbf{1}_{45}) \times Z_2(6)$ ist, erhalten wir somit das folgende reduzierte Faserbündel $(SO(2) \oplus SO(4))$ $(M_c^4,\ (\mathbf{1}_o \oplus SO(3) \oplus \mathbf{1}_{45}) \times Z_2(6))$ von dem Hauptfaserbündel $SO^{\uparrow}(2,4)$ $(M_c^4,\ G_{c_2})$. Zuletzt sei bemerkt, im Rahmen der Faserbündel-Theorie stellt M_c^4 den Basisraum eines Hauptfaserbündels $Q_o^5(M_c^4, A)$ dar, mit der multiplikativen Gruppe $\mathbf{1}_o$ als Strukturgruppe A.

[illegible] Die physikalische Interpretation der konformen Transformationen und die entsprechende Interpretation für die Punkte aus [illegible] und [illegible].

Die physikalische Interpretation der konformen Transformationen ist bis zu dem heutigen Tag weiterhin uneinheitlich geblieben. [illegible] [illegible] [illegible] bzw. die speziellen konformen Transformationen als ortsunabhängige bzw. ortsabhängige Maßstabeumeichungen oder, äquivalent damit, als ortsunabhängige bzw. ortsabhängige Skalentransformationen zu interpretieren sind, in der Hochenergiephysik allgemeinen Anklang gefunden zu haben scheint, bedienen sich manche Autoren [33] in ihren Arbeiten immer noch der alten Interpretation, wonach die speziellen konformen Transformationen als die Transformationen verstanden wurden, die zwei sich mit konstanter relativer Beschleunigung bewegende Systeme verbinden. Nicht zuletzt wegen der geringeren Brauchbarkeit der letzten Interpretation in der Hoch-[illegible] [illegible] [illegible]-interpretation" halten.

Andererseits, wenn man die Interpretation als geometrische Eichtransformationen akzeptiert, erhebt sich noch die Frage, wie weit man diese Interpretation anwenden will, d.h. soll man z.B. die Masse des Teilchens ebenfalls mittransformieren. Es gibt in der Tat Versuche in dieser Richtung [34]. In der zitierten Arbeit mußte man dann den ganzen R_2^6-Raum und dementsprechend anstatt $C(2,4)$ die 21-parametrige $IO(2,4)$ heranziehen, um mit der Interpretation consistent zu bleiben [35].

Wir wollen in unserer Arbeit bei der orthodoxen Philosophie bleiben: die konforme Symmetrie soll nur bei den extrem hohen Energien eine gute Symmetrie sein, wo man die Ruhemasse des Teilchens vernachlässigen kann. Die Masse wird nicht mittransformiert. Sie leitet vielmehr erst bei der niedrigen Energie den Mechanismus der Symmetriebrechung ein.

In unserem flachen Minkowskiraum M^4 kann man unserer Interpretation zufolge jedem Ereignis, z.B. dem Zerfall des Pions in Myon und Antineutrino, ein 5-Tupel von Zahlen

$$(\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3, \varkappa)$$

zuordnen. Die ersten vier Komponenten geben ihre zeitliche und

räumlichen Positionen an und zwar bezüglich eines orthogonalen Vierbeins, das in einem beliebig gewählten Punkt $\overset{\circ}{x}$ (dem ein gewisses Ereignis $\overset{\circ}{E}$ zugeordnet sein möge) angeheftet ist. Die fünfte Koordinate gibt das Vielfache des für die Messung der obigen ersten vier Zahlen verwendeten Maßstabes b bezüglich eines beliebig gewählten festen "Einheitsmaßstabes" $\hat{b}$ an:

$$b = \frac{1}{\varkappa}\,\hat{b}\ , \qquad \varkappa \neq 0\ ,$$

bzw.

$$\underline{b}^j = \frac{1}{\varkappa}\,\underline{\hat{b}}^j$$

bezogen auf das orthogonale Vierbein, wobei $\underline{\hat{b}}^j$ der Einheitsmaßstab auf der j-ten Achse bedeutet. Falls man die ersten vier Komponenten, die man nach der Messung bezüglich des Einheitsmaßstabes $\hat{b}$ erhalten hat, mit (x^0, x^1, x^2, x^3) bezeichnet, während diejenigen vier Komponenten bezüglich des Maßstabes $b = \frac{1}{\varkappa}\,\hat{b}$ mit $(\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3)$ bezeichnet seien (die gleichwohl dem gleichen Ereignis E zugeordnet sein mögen, i.e. $E \leftrightarrow x^j\,\underline{\hat{b}}_j = \eta^j\,\underline{b}_j$), dann besteht zwischen den beiden Tupeln die Relation

$$x^j = \eta^j/\varkappa\ .$$

Der Minkowskiraum M^4, d.h. die Gesamtheit der Ereignisse $\{E\}$, steht demnach in eineindeutiger Beziehung zu der Gesamtheit der Zahlen $\{(x^j)\} = \mathbb{R}^4_1$, während die Gesamtheit der Punkte $(\eta^j, \varkappa \neq 0)$ eine offene Teilmenge $N^5_\varkappa$ von $\mathbb{R}^5 = \{(\eta^j, \varkappa)\}$ bildet und die projektive Abbildung

$$\pi_\varkappa\ :\ (\eta^j, \varkappa \neq 0) \in N^5_\varkappa \longmapsto x^j = \eta^j/\varkappa \in \mathbb{R}^4_1$$

diese in indirekter Weise in Beziehung zu dem Minkowskiraum M^4 setzt (vgl. Diagramm (21)).

Die physikalische Interpretation der Punkte von Q^5_0 ist daher wie folgt: Auf jeder der in Q^5_0 dichten und offenen Teilmengen $\hat{N}_\alpha$, $\alpha \in Z$, repräsentiert das Tupel (η^j, α) des Punktes $q = (\eta^j, \alpha, \bar{\alpha} = \frac{\eta^j}{\alpha}\eta^j)$ aus $\hat{N}^5_\alpha$ einmal die Raum-und Zeitkoordinaten des physikalischen Ereignisses und andererseits die Größe des verwendeten Maßstabes bezüglich eines in $\hat{N}^5_\alpha$ festgelegten Einheitsmaßstabes. Die sechste abhängige Zahl $\bar{\alpha}$ von q hat auf demselben $\hat{N}^5_\alpha$ keine unmittelbare physikalische Bedeutung. Auf der Karte $\hat{N}^5_{\bar{\alpha}}$ aber sind die Rollen der Zahlen α und $\bar{\alpha}$ gerade vertauscht. Dabei stehen die Einheitsmaßstäbe in $\hat{N}^5_\alpha$ und $\hat{N}^5_{\bar{\alpha}}$ in einer einfachen Beziehung zueinander[29]. Sie gehen auseinander durch Umeichungen hervor, und zwar bezüglich des gleichen Bezugspunktes. Die fünf Koordinaten (η^j, β) von $\hat{N}^5_\beta$

sowie $(\eta^j, \bar{\beta})$ von $\hat{N}^5_{\bar{\beta}}$, $\beta, \bar{\beta} \in Z\setminus\{\alpha, \bar{\alpha}\}$, haben die gleichen Interpretationen wie die fünf Koordinaten (η^j, α) von $\hat{N}^5_\alpha$. Der in $\hat{N}^5_\beta$ oder $\hat{N}^5_{\bar{\beta}}$ verwendete Einheitsmaßstab geht durch eine kombinierte Umeichung und Bezugspunktverlegung aus dem Einheitsmaßstab von $\hat{N}^5_\alpha$ oder $\hat{N}^5_{\bar{\alpha}}$ hervor. Natürlich kann man die verschiedenen Einheitsmaßstäbe nur dort "vertauschen", wo $\hat{N}^5_\alpha \cap \hat{N}^5_{\alpha'} \neq \emptyset$ für $\alpha, \alpha' \in Z$ ist.

Wegen dieser Interpretation stellen die Punkte η und η' in Q^5_o nur dann zwei verschiedene physikalische Ereignisse dar, falls $\eta \neq r\eta'$ für $r \in \mathbb{R}_o$ ist. Die Elemente von M^4_c bestehen gerade aus solchen Äquivalenzklassen $[\eta] = \{\eta \in Q^5_o \mid \eta' \overset{\wedge}{\sim} \eta \Leftrightarrow \eta' = r\eta, r \in \mathbb{R}_o\}$. Darin zeichnen wir o.E.d.A. die Karte $\hat{\Omega}_\varkappa$ in M^4_c aus, und identifizieren sie (mittels des Homöomorphismus $\psi_\varkappa$) mit dem bekannten Minkowskiraum M^4. Die übrigen Karten $\hat{\Omega}_\alpha$ enthalten (wegen der Dichtheit von $\hat{\Omega}_\alpha \cap \hat{\Omega}_\varkappa$ in M^4_c) außer einer uns schon bekannten Menge von physikalischen Punkten (i.e. für $\varkappa(\eta) \neq 0$) noch zusätzlich Punkte im Unendlichen (i.e. für $\varkappa(\eta) = 0$), die im Minkowskiraum M^4 gerade fehlen. Die physikalische Interpretation solcher Punkte ist nicht ganz einfach. Weil der Minkowskiraum gerade erst durch Hinzufügung solcher "Punkte im Unendlichen" kompaktifiziert wird, ist es daher naheliegend, die "Punkte im Unendlichen" analog dem Nord- oder Südpol der Riemannschen Zahlenkugel zu intepretieren, die ja eine Kompaktifizierung der Zahlenebene (mittels der stereographischen Projektion) darstellt.

3. Die Tangentialräume $(Q_o^5)_q$, $(M_c^4)_{[q]}$ und ihre Dualräume $(Q_o^5)_q^*$ bzw. $(M_c^4)_{[q]}^*$ der Mannigfaltigkeit Q_o^5 bzw. M_c^4.

Eine konform-invariante "Zeitordnung", genauer gesagt, eine konform-invariante antisymmetrische Funktion in zwei Variabeln, scheint für den Aufbau einer nichttrivialen konform-invarianten Feldtheorie unentbehrlich zu sein, ganz abgesehen davon, ob eine solche Theorie existiert. Diese Existenzfrage wird hier nicht behandelt. Es zeigt sich, daß die Struktur der Tangentialräume und die der Vektorfelder auf Q_o^5 und insbesondere auf M_c^4 für die Existenz einer solchen antisymmetrischen Funktion von großer Bedeutung ist. Wir wollen daher in diesem Abschnitt die Eigenschaften der Tangentialräume sowie ihrer Dualräume auf Q_o^5 und M_c^4 zuerst studieren.

Von den vielen zueinander äquivalenten Definitionen der Tangentialräume wollen wir die von Helgason [17] benutzen:

Definition (28)
Sei A eine Algebra über $\mathbb{K}$. Eine Derivation D ist eine lineare Abbildung: $A \to A$ mit $D(f.g) = f.D(g) + D(f).g$, für alle $f,g \in A$.

Definition (29)
Ein Vektorfeld X auf einer C^∞-Mannigfaltigkeit M ist eine Derivation der Algebra $C^\infty(M)$.

Wir wollen mit T(M) die Menge aller Vektorfelder auf M bezeichnen. T(M) wird vermöge $fX: g \mapsto f(Xg)$ und $X+Y: g \mapsto Xg + Yg$ für $f,g \in C^\infty(M)$ und $X,Y \in T(M)$ ein $C^\infty(M)$-Modul. Die Beziehung zwischen Vektorfeldern und Tangentialraum sieht man aus der folgenden

Definition (30)
Sei $p \in M$, $X \in T(M)$ und $X_p: C^\infty(p) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto (Xf)(p)$ eine lineare Abbildung der im Punkt p unendlich oft differenzierbaren Funktionen $C^\infty(p)$ in die reelle Zahlen. Mit der üblichen $\mathbb{R}$-Addition und Multiplikation wird $M_p := \{X_p,\ X \in T(M)\} \equiv T_p(M)$ ein Vektorraum und heißt der Tangentialraum von M an der Stelle p.

Die Dualräume sind gegeben durch die folgende

Definition (31)
Sei A ein kommutativer Ring mit Einselement. E sei ein A-Modul. Dann ist $E^* := \{A\text{-lineare Abbildung: } E \xrightarrow{h} A\}$ ebenfalls ein A-Modul

und heißt der Dualmodul von E.

Für den Dualmodul $(T(M))^*$ des C^∞-Moduls $T(M)$ gilt $((T(M)^*)^*=T(M)$. Man kann ebenfalls zeigen, daß für den Vektorraum $(T(M))^*_p$ gilt: $(T(M))^*_p = (M_p)^*$. Die Elemente des Dualmoduls $(T(M))^*$ heißen die (differenzierbaren) 1-Formen auf M.

3.1. Die Charakterisierung der Elemente von $(Q^5_o)_o$ und $(Q^5_o)^*_o$.

Für diesen und spätere Abschnitte sind die folgenden Definitionen zum besseren Verständnis sowie für die Analyse der Struktur der Tangentialräume, Vektorfelder usw. sehr nützlich.

Definition (32)
Seien M, N C^∞-Mannigfaltigkeiten, ϕ eine an der Stelle $p \in M$ differenzierbare Abbildung und $A \in M_p$. Die Abbildung $\phi_{p*}: M_p \to N_{\phi(p)}$, $A \mapsto B$ mit $B(g) := A(g\circ\phi)$ für alle $g \in C^\infty(\phi(p))$ ist die von ϕ induzierte Abbildung der Tangentialräume.

Definition (33)
Seien M, N C^∞-Mannigfaltigkeiten, ϕ eine differenzierbare Abbildung von M in N. Ferner seien $X \in T(M)$ und $Y \in T(N)$. X und Y heißen ϕ-bezogen, wenn

$$\phi_{p*}(X_p) = Y_{\phi(p)} \;\forall\, p \in M \iff (Xf)\circ\phi = X(f\circ\phi) \;\forall\, f \in C^\infty(\ldots).$$

Definition (34)
Seien M und N C^∞-Mannigfaltigkeiten.
a) Eine Abbildung $\phi: M \to N$ ist regulär in $p \in M$, wenn ϕ_{p*} eineindeutig ist. ϕ ist regulär (oder heißt auch eine Immersion), wenn ϕ regulär in jedem $p \in M$ ist.
b) ϕ heißt Einbettung von M in N, wenn ϕ regulär und eineindeutig ist.

Das folgende Lemma (36) gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Tangentialvektor bzw. ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^6_o$ zu einem Tangentialraum bzw. Vektorbündel von Q^5_o gehört. Dabei wollen wir Q^5_o mittels der Einbettung ι als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^6_o$ ansehen:

$$\begin{array}{ccc} (\eta^j,\alpha,\bar\alpha) \equiv q \in \hat N^5_\alpha \subset Q^5_o & \xrightarrow{\;\iota\;} & \mathbb{R}^6_o \\ \downarrow \varphi_\alpha & & \downarrow \mathrm{id}. \\ (\eta^j,\alpha) \equiv q_\alpha \in N^5_\alpha & \xrightarrow{\;\zeta_\alpha\;} & \mathbb{R}^6_o \end{array} \qquad (35)$$

$\alpha \in Z$,

mit $\zeta_\alpha = \mathrm{id}.\circ\iota\circ\varphi_\alpha^{-1}$: $q_\alpha \in N^5_\alpha \mapsto (\eta^j, \alpha, \bar\alpha = \frac{\eta^j\eta_j}{\alpha}) \in \mathbb{R}^6_o$.

Wir verzichten hierbei auf die Benutzung der bezüglich der Kartenbenennung symmetrischen Koordinaten ($\tilde{\varkappa}, \tilde{\lambda}, \eta^2, \eta^3, \varkappa, \lambda$). Der Index j von η^j hat dann den Wertebereich $\{0,1,2,3\}$ für $\alpha = \varkappa$ oder λ, und $\{5,4,2,3\}$ für $\alpha = \tilde{\varkappa}$ oder $\tilde{\lambda}$.

Lemma (36)

Sei $\iota(Q_o^5)$ Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}_o^6$ und $a^\mu(q)\partial_\mu \in T_q(\mathbb{R}_o^6)$. Für $a = (\eta^\mu) = \iota(c) \in \iota(Q_o^5)$ ist $a^\mu(q)\partial_\mu \in (\iota(Q_o^5))_q \cap (\mathbb{R}_o^6)_q$ genau dann, wenn $k(a,q) = 0$ ist. (k ist die in der Gl.(3) angegebene Bilinearform im $\mathbb{R}_o^5$.)

1.Beweis:

Sei $A := \{j, \alpha, \bar{\alpha}\}$, $I_\alpha := \{j, \alpha\}$ und sei $\{\hat{e}_m\}_{m \in A} = \{\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial \eta^j}, \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha}, \partial_{\bar{\alpha}} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}}\}$ Basis der Vektorfelder auf $\mathbb{R}_o^6$. Nach geeigneter Transformation (z.B. für $\alpha = \varkappa$, $a_\varkappa := a^4 - a^5$, $a_\lambda := a^4 - a^5$) erhalten wir

$$a^\mu \partial_\mu = a^j \partial_j + a_\alpha \partial_\alpha + a_{\bar{\alpha}} \partial_{\bar{\alpha}} = a^m \hat{e}_m .$$

Die Basis der Vektorfelder auf $\hat{\mathbb{R}}_\alpha^5$, $\{e_\alpha^i\}_{i \in I_\alpha}$, steht mit $\{\hat{e}_m\}$ in folgender Beziehung (vgl.Ref.[17], S.22 bzw.vgl.Def.(33))

$$\iota_{*c}(e_\alpha^i) = \sum_{m \in A} \frac{\partial \zeta_\alpha^m}{\partial q_\alpha^i}(\varphi_\alpha(q))\,(\hat{e}_m)_{\iota(q)} \qquad (37)$$

$$= \frac{\partial \eta^j}{\partial q_\alpha^i} \frac{\partial}{\partial \eta^j} + \frac{\partial \alpha}{\partial q_\alpha^i} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial q_\alpha^i} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial \eta^j} + \frac{2\eta_j}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} & \text{für } i = j \in I_\alpha \setminus \{\alpha\} \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} & \text{für } i = \alpha \end{array} \right\}$$

Sei nun $a^m(q)\cdot \hat{e}_m \in (\mathbb{R}_o^6)_q$. Es gilt dann

$$\sum_{m \in A} a^m(q)\cdot \hat{e}_m = a^j(q)\,(\partial/\partial \eta^j + (2\eta_j/\alpha)\,\partial/\partial \bar{\alpha}) + a_\alpha(q)\,(\partial/\partial \alpha - \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\partial/\partial \alpha) +$$

$$+ (a_{\bar{\alpha}}(q) - a^j(q) 2\eta_j/\alpha + a_\alpha(q)\cdot \bar{\alpha}/\alpha)\,\partial/\partial \bar{\alpha}$$

$$= \sum_{i \in I_\alpha} a^i(q)\,(\iota_{*c} e_\alpha^i) - 2k(a,q)/\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \qquad (38)$$

daraus folgt die Behauptung. q.e.d.

Ohne auf die Karte Bezug nehmen zu müssen, können wir das Lemma ebenfalls beweisen, dazu die

Definition (39)

Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Eine Kurve in M ist eine reguläre Abbildung von einem offenem Intervall I aus $\mathbb{R}$ in M.

2.Beweis des Lemmas (36):

Sei I ein offenes Intervall aus $\mathbb{R}$ und $0 \in I$. Sei γ eine Kurve, $\gamma: t \in I \mapsto \gamma(t) = (\eta^0(t), .., \eta^5(t)) \in \mathbb{R}_o^6$ mit $\gamma(0) = q \in \mathbb{R}_o^6$ und $\gamma_{*t=0}(\frac{d}{dt}) = (a^0, .., a^5) =$ linearer Anteil von $\gamma(t)$. Die Def.(33) liefert dann für $f \in C^\infty(\mathbb{R}_o^6)$

$$(\gamma_{*}\frac{d}{dt})f\circ\gamma(t) = \frac{d}{dt}\, f(\gamma(t)) = \frac{\partial f(\gamma,t)}{\partial \gamma^{\mu}(t)}\,\frac{\partial \gamma^{\mu}(t)}{\partial t}$$

Die linke Seite verschwindet ganz allgemein für konstante $f(\gamma(t))$. Setzen wir $f(\gamma(t)) := \eta^{\mu}(t)\cdot\eta_{\mu}(t) = \text{konst.}$ für $t \in I' \subseteq I$, so erhalten wir

$$0 = \frac{d}{dt}\, f(\gamma(t)) = \eta_{\mu}(t)\,\frac{\partial \eta^{\mu}(t)}{\partial t}\quad , \; t \in I'.$$

Wenn nun $\gamma(0)=o \in U_o^5 \cap \mathbb{R}_o^6$ und $\gamma(t) \in \mathcal{U}(\gamma(0)) \subset U_o^5$ für $t \in I' \subseteq I$ sind, dann haben wir $f(\gamma(t))=0$ für $t \in I' \cup \{0\}$, so daß die obige Gleichung für das Intervall $I' \cup \{0\}$ weiterhin besteht. Insbesondere erhält man für $t=0$ die gewünschte (notwendige) Bedingung

$$\eta_{\mu}(0)\,\frac{\partial \eta^{\mu}}{\partial t}(0) = k(q,a) = 0,\quad q=(\eta^{\mu}(0)).$$

Umgekehrt sei $k(q,a)=0$. Aus $f(\gamma(0))=0$ und $\frac{d}{dt}f(\gamma(0)) = k(q,a) = 0$ folgt dann, daß es eine ε-Umgebung von $\gamma(0)$, $\mathcal{U}_{\varepsilon}(\gamma(0))$, gibt, wo die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\, f(\gamma(t)) = \eta_{\mu}(t)\,\frac{\partial \eta^{\mu}(t)}{\partial t}$$

identisch verschwindet: $f(\gamma(t))=0$ für $\gamma(t) \in \mathcal{U}_{\varepsilon}(\gamma(0))$ oder, für $|t| < \varepsilon$. Hieraus folgt, $\gamma(t) \in Q_o^5$ für $|t| < \varepsilon$. Die zu dem vorgegebenen Tangentialvektor $a^{\mu}\partial_{\mu}$ gehörende Kurve $\gamma(t)$ stellt somit für $|t| < \varepsilon$ eine Kurve im Q_o^5 dar, daher ist $a^{\mu}\partial_{\mu} \in (Q_o^5)_o$. q.e.d.

Dieser 2. Beweis des Lemmas (36) liefert nebenbei für die Größe a_{α} folgende physikalische Interpretation: Da $a_{\alpha} = \frac{d\alpha(\eta(t))}{dt}\Big|_{t=0}$ ist, gibt a_{α} die Größe der Änderung des Maßstabes $b=\frac{1}{\alpha(\eta)}\cdot b$ an der Stelle $q=\eta(t)\big|_{t=0}$ an, und zwar längs der durch $\gamma(t)$ beschriebenen Kurve.

Für die allgemeinen Elemente von $(Q_o^5)_q^{\mathbb{R}}$, $a^{\mu}(q)\cdot d\eta^{\mu}$, gibt es keine analoge Beziehung wie die für die allgemeinen Elemente von $(Q_o^5)_q$, i.e. $k(a,q)=0$. Nur für einen ganz speziellen Fall $a^{\mu}(q)=\eta_{\mu}$ gilt das folgende

Lemma (40)

Sei $q=\eta^{\mu} \in U_o^5$ und $d\eta^{\mu} \in \mathfrak{L}_{o,o}^{6,\mathbb{R}}$. Dann gilt $\eta^{\mu}d\eta_{\mu} = 0$ auf $(U_o^5)_o^{\mathbb{R}}$. (Darin wird $(Q_o^5)_o^{\mathbb{R}}$ als $\mathbb{R}$-Modul aufgefaßt. Wir geben hier einen Karten-unabhängigen Beweis.)

Beweis:

Zu $f \in C^{\infty}(M)$ kann man mittels der äußeren Differentiation d eine 1-Form df durch $(df)_X := Xf$, $X \in T_q(M)$, definieren. Entsprechend gilt $(df)_q X_q = X_q f$ für $X_q \in T_q(M)$, $f \in C^{\infty}(M)$. Falls $f=\text{konst.}$ ist, dann wird $X_q f=0$ und daher $(df)_q X_q = 0 \;\forall\; X_q \in T_q(M)$, woraus folgt $(df)_q = 0$. Dabei kann man $(df)_q$ als eine lineare Abbildung von

$T_q(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$ auffassen. Unser Lemma ist eine triviale Folgerung dieser allgemeinen Überlegung: für $q \in Q_o^5 \equiv M$ stellt die Funktion $f(q) = \eta^\mu \eta_\mu$ eine Konstante dar, wir bekommen daher $0 = df(q) = 2\eta^\mu d\eta_\mu$. q.e.d.

Die Lemmata (36) und (40) erlauben uns ohne Bezugnahme auf irgendeine Karte zu sagen, daß die Menge $\{\eta^\mu \partial_\nu - \eta^\nu \partial_\mu,\ q=(\eta^\mu) \in Q_o^5\}$ bzw. $\{\eta^\nu d\eta^\mu - \eta^\mu d\eta^\nu,\ q=(\eta^\mu) \in Q_o^5\}$ die Räume $(Q_o^5)_q$ bzw. $(Q_o^5)_q^*$, $q=(\eta^\mu) \in Q_o^5$, aufspannen, da die Bedingungen der entsprechenden Lemmata von diesen Tangentialvektoren bzw. Kotangentialvektoren erfüllt werden.

3.2. Die Charakterisierung der Elemente von $T(M_c^4)$ und $(T(M_c^4))^*$

Da die Elemente $\hat{q}$ von M_c^4 Äquivalenzklassen in Q_o^5 sind, führt die Untersuchung von $(M_c^4)_{\hat{q}}$ daher zur Betrachtung der Tangentialräume $\{(Q_o^5)_{q'} : q' \in [q] \equiv \hat{q}\}$. In diesem Zusammenhang zeigt sich, daß die Betrachtung der Vektorfelder günstiger ist. Zunächst besprechen wir die Beziehung zwischen $T(Q_o^5)$ und $T(\mathbb{R}_o^6)$ [36]. Wir werden feststellen, daß die Vektorfelder in $T(Q_o^5)$ die in $T(\mathbb{R}_o^6)$ induzieren und umgekehrt, so daß wir uns über die Existenz der nichttrivialen Vektorfelder auf Q_o^5 vergewissern können.

Sei f_α die Einschränkung von $f \in C^\infty(Q_o^5)$ in $\hat{N}_\alpha^5$ mit Argumenten (η^j, α): $f_\alpha(\eta^j, \alpha) \big|_{\hat{N}_\alpha^5} = f_\alpha(\eta^j, \alpha)$. Es gibt dann ein $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}_o^6)$ mit $\hat{f}\big|_{\hat{N}_\alpha^5} = f_\alpha$ [37]. Wenn man bei dieser Betrachtung (bezüglich $\hat{N}_\alpha^5$) die folgende nicht singuläre Koordinatentransformation $(\eta^\mu) \longmapsto (\eta^j, \alpha, \xi = \eta^\mu \eta_\mu)$ in $\mathbb{R}_o^6$ durchgeführt hat, besagt die letzte Gleichung $\hat{f}(\eta^j, \alpha, \xi = 0) = f_\alpha(\eta^j, \alpha)$ auf $\hat{N}_\alpha^5$. In diesen neuen Koordinaten erhält $\hat{s}^\mu(.)\partial_\mu \in T(\mathbb{R}_o^6)$ ebenfalls eine neue Form

$$\hat{s}^j(.)\partial_j + \hat{s}_\alpha(.)\partial_\alpha + \hat{s}_\xi(.)\partial_\xi = {}^{\alpha}\hat{X}_\alpha ,$$

mit $$\hat{s}_\xi(q) = 2\eta^j \hat{s}_j(q) - \alpha \hat{s}_{\bar{\alpha}}(q) - \bar{\alpha}\hat{s}_\alpha(q),\quad q \equiv (\eta^\mu),$$

und $$\hat{s}_\alpha = \hat{s}^4 - \hat{s}^5,\quad \hat{s}_{\bar{\alpha}} = \hat{s}^4 + \hat{s}^5 \text{ falls z.B. } \alpha = \infty \text{ ist.}$$

Hieraus bekommt man, natürlich in nicht eindeutiger Weise, durch die Setzung

$$X_\alpha f_\alpha := \hat{X}_\alpha \hat{f}\big|_{\hat{N}_\alpha^5}$$

ein induziertes Vektorfeld X_α auf $\hat{N}_\alpha^5$ mit dem Definitionsbereich $\{f_\alpha \in C^\infty(\hat{N}_\alpha^5)\}$, wobei

$$X_\alpha = s^j(.)\partial_j + s_\alpha(.)\partial_\alpha + s_{\bar{\alpha}}(.)\partial_{\bar{\alpha}},$$

mit $$s^j(q) := \hat{s}^j(\eta^j, \alpha, \xi = 0),\quad s_\alpha(q) := \hat{s}_\alpha(\eta^j, \alpha, \xi = 0),$$

und $$s_{\bar{\alpha}}(q) := (2 s^j(q)\eta_j - \bar{\alpha} s_\alpha(q))/\alpha$$

sind. (Bezüglich $s_\alpha(a)$ vgl. Lemma (36), das auch für Vektorfelder gültig bleibt.) Das gesuchte Vektorfeld $\tilde{X}_\alpha$ auf Q_o^5 ist dann mittels

$$\tilde{X}_\alpha(f)(p) := \begin{cases} h(p)\ (X_\alpha f_\alpha)(p) & \text{für } p \in \hat{N}_\alpha^5 \\ 0 & \text{für } p \in Q_o^5 \setminus \hat{N}_\alpha^5 \end{cases} \qquad (41)$$

$h, f \in C^\infty(Q^5)$, $W \subset$ Träger von $(h) \subset \hat{N}^5$ mit $h(W)=1$,
wobei W kompakte Teilmenge in $\hat{N}_\alpha^5$ ist,

gegeben. Es ist klar, daß das induzierte Vektorfeld auf Q_o^5 nicht eindeutig definiert ist. Hätte man nämlich mit einer anderen Karte $\hat{N}_\beta^5$ angefangen, dann würde man aus dem gleichen $\hat{X} \in T(\mathbb{R}_o^6)$ ein dem $\tilde{X}_\alpha$ entsprechendes $\tilde{X}_\beta$ bekommen, das i.a. bis auf den gemeinsamen Definitionsbereich $C^\infty(Q_o^5)$ von $\tilde{X}_\alpha$ verschieden ist.

Genauso erhält man aus $\tilde{X} = s^\mu \partial_\mu \in T(Q_o^5)$ ohne weiteres ein induziertes Vektorfeld $\hat{X} \in T(\mathbb{R}_o^6)$, z.B.

$$\hat{X}(q) = \begin{cases} h(c)(s^j(c)\partial_j + s_\alpha(a)\partial_\alpha + s_\xi(a)\partial_\xi) & \text{für } q \in V_\alpha := \{c \in \mathbb{R}_o^6 : \alpha(c) \neq 0\} \\ 0 & \text{für } q \in \mathbb{R}_o^6 \setminus V_\alpha \end{cases} \qquad (42)$$

$h \in C^\infty(\mathbb{R}_o^6)$, $\hat{N}_\alpha^5 \subset$ Tr.v.$(h) \subset V_\alpha$ und $h|_{\hat{N}_\alpha^5} = 1$.

Die Nicht-Eindeutigkeit von $\hat{X}$ ist ersichtlich.

Bei der obigen Diskussion hat es den Anschein (s.z.B.Gl.(41) und Gl.(42)), als ob wir im Grunde nur lokale Vektorfelder auf Q_o^5 zur Verfügung hätten. Dagegen werden wir im Abschnitt 3.4.3. sehen, daß es global auf Q_o^5 wohldefinierte (i.e. A-invariant und differenzierbar etc.) Vektorfelder gibt. Im folgenden werden wir die Existenz solcher Felder als gegeben annehmen.

Die in den Definitionen (32) bzw. (33) gegebene Abbildung zwischen den Tangentialräumen ist i.a. nicht auf Vektorfeldern definiert [38]. In unserem Fall induziert die Abbildung

$$\hat{\pi} : \ Q_o^5 \longrightarrow Q_o^5/A \equiv \hat{\Omega}$$

erst dann eine wohldefinierte Abbildung

$$\hat{\pi}_* : \ T(Q_o^5) \longrightarrow T(\hat{\Omega}) \ ,$$

wenn für $q, p \in Q_o^5$ mit $\hat{\pi}(q) = \hat{\pi}(p)$ gilt

$$\hat{\pi}_*(T_q(Q_o^5)) = \hat{\pi}_*(T_p(Q_o^5)) \qquad (43)$$

Nun sei $s^\mu(a)\partial_\mu \in T(Q_o^5)$ und $(\hat{\Omega}_\alpha, \psi_\alpha)$ sei eine lokale Karte von $\hat{\Omega}$. Nach der Transformationsvorschrift gemäß Definition (33) erhalten wir für $f \in C^\infty(\Omega_\alpha)$; $q \in Q_o^5$, $x_\alpha^j = q^j/\alpha(q)$,

$$(\psi_{\alpha*} \circ \hat{\pi}_{\alpha*})(s^\mu(q)\partial_\mu) f \circ (\psi_\alpha \circ \hat{\pi}_\alpha)(c) = \left(\frac{s^j(q)}{\alpha(q)} - \frac{s_\alpha(q)}{\alpha(q)}\frac{q^j}{\alpha(q)}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} f(x_\alpha) \qquad (44)$$

Für $p,q \in Q_o^5$ mit $\hat{\pi}(p) = \hat{\pi}(q)$, i.e. $p = rq$, $r \in \mathbb{R}_o$, wird die Bedingung (43) erfüllt, falls man verlangt, daß $s^\mu(q)$ eine homogene Funktion in q vom Grad +1 ist. M.a.W., $s^\mu(q)$ soll ein Λ-invariantes Vektorfeld auf Q_o^5 sein, wenn Λ eine multiplikative Gruppe $\mathbb{R}_o$ ist. Da die Existenz solcher Vektorfelder $\hat{T}(Q_o^5)$ auf der Mannigfaltigkeit Q_o^5 (nach 3.4.3.) gesichert ist, kann man daher sinnvoll über den (induzierten) Tangentialraum im Punkt $[q] = \hat{\pi}(\{q\}) \in \hat{\Omega}$ sprechen:

$$(\hat{\Omega})_{[q]} := \hat{\pi}_*(\hat{T}_p(Q_o^5)), \qquad \text{mit beliebigem } p \in [q]. \tag{45}$$

Die Elemente $A^j(p)/\alpha(p)$ von $(\hat{\Omega})_{[q]}$, $p \in [q]$, sind mit den Elementen $s^\mu(q)\partial_\mu$ von $\hat{T}_q(Q_o^5)$ durch

$$\frac{1}{\alpha(p)} A^j(p) = \left(\frac{s^j(.)}{\alpha(.)} - \frac{s_\alpha(.)}{\alpha(.)} \frac{(.)^j}{\alpha(.)}\right)\Big|_p \equiv \frac{1}{\alpha(.)} S^j(.)\Big|_p \tag{46}$$

$$= \frac{a^j(p)}{\alpha(p)} - \frac{a_\alpha(p)}{\alpha(p)} \frac{p^j}{\alpha(p)}, \quad p \in [q]$$

verknüpft, oder, ausgedrückt in den lokalen Koordinaten $\psi_\alpha(\hat{\Omega}_\alpha) = \Omega_\alpha$

$$A^j(x_\alpha) = a^j(x_\alpha) - a_\alpha(x_\alpha)\, x_\alpha^j . \tag{47}$$

$A^j(x_\alpha)\, \partial/\partial x_\alpha^j$ ist somit das allgemeine Element von $(\Omega_\alpha)_{\psi_\alpha[q]}$. In den jeweiligen lokalen Koordinaten $\{N_\alpha^5\}$ und $\{\Omega_\alpha\}$ (vgl. das Diagramm (21)) haben wir mit $q_\alpha = (q^j, \alpha(q))$ und $(\varphi_\alpha \circ \pi_\alpha)(q_\alpha) = (x_\alpha^j) = (q^j/\alpha(q))$

$$\pi_*: \quad (N_\alpha^5)_{q_\alpha} \longrightarrow (\Omega_\alpha)_{x_\alpha} \tag{48}$$

$$X_{q_\alpha}^{(\alpha)} = a^j(q_\alpha)\partial_j + a_\alpha(q_\alpha)\partial_\alpha \mapsto \begin{cases} A^j(x_\alpha)\cdot \partial/\partial x_\alpha^j , \\ a_{\bar{\alpha}}(x_\alpha) = 2x_{\alpha_j} a^j(x_\alpha) - (x_\alpha \cdot x_\alpha) a_\alpha \end{cases}$$

Darin stellt $X_{q_\alpha}^{(\alpha)}$ das allgemeine Element von $(N_\alpha^5)_{q_\alpha}$ dar und $a_{\bar{\alpha}}$ ist mit Hilfe vom Lemma (36) zu bekommen.

Wegen der Gültigkeit der Gl.(43) für $\hat{T}(Q_o^5)$ können wir ferner die Menge der Vektorfelder $T(\hat{\Omega})$ auf $\hat{\Omega}$ vermöge der Gl.(45) definieren. Die beiden Mengen $\hat{T}(Q_o^5)$ und $T(\hat{\Omega})$ sind in diesem Sinne $\hat{\pi}$-bezogen. Aus obiger Diskussion können wir nun die Charakterisierung für die Elemente von $(\hat{\Omega})_{[q]}$ mittels der Vektorfelder $T(\hat{\Omega})$ so formulieren:

Lemma (49)

Sei $s^\mu(.)\partial_\mu \in T(\mathbb{R}_o^5)$. Dann ist $s^\mu(.)\partial_\mu \in T(\hat{\Omega})$ genau dann, wenn $s^\mu(q)\cdot q_\mu \equiv k(s,\alpha) = 0$ und $s^\mu(q)$ homogen vom 1. Grad in q, $q \in Q_o^5$ ist.

Aufgrund des Lemmas sind dann sowohl $\eta^\mu\partial_\mu$ als auch $\eta_\mu\partial_\nu - \eta_\nu\partial_\mu$ Elemente von $T(\hat{\Omega})$. Dabei stellen wir insbesondere fest, daß $\eta^\mu\partial_\mu$

ein identisch verschwindendes Vektorfeld auf $\hat{\Omega}$ darstellt, wie man durch die Einsetzung von $s^\mu(q)=\eta^\mu$ in die Gl.(44) sofort einsieht.

Der tiefere Grund für das Verschwinden von $\eta^\mu\partial_\mu$ auf $\Gamma(\hat{\Omega})$ ist folgender: Zu jedem Element X der Lie-Algebra $\mathcal{O}_J$ einer Lie-Gruppe G kann man eine 1-parametrige Untergruppe - definitionsgemäß ein analytischer Homöomorphismus von $\mathbb{R}$ nach G: $t\in\mathbb{R}\mapsto e^{tX}\in G$ - zuordnen [34]. Wirkt nun G als eine Lie-Transformationsgruppe auf einer Mannigfaltigkeit M, dann kann man zu jedem $X\in\mathcal{O}_J$ ein Vektorfeld X^+ auf M mittels der Formel

$$(X^+f)(p):=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(e^{tX}.p)-f(p)\right),\quad f\in C^\infty(M),\ p\in M,$$

assoziieren [40]. Gemeint ist damit das von der 1-parametrigen Untergruppe e^{tX} induzierte Vektorfeld auf M. Es ist in der Tat identisch mit dem entsprechenden linearen Anteil bei der Entwicklung von $f(e^{tX}p)$ nach t, wie man aus der obigen Formel sehen kann.

Wir betrachten nun in der Mannigfaltigkeit $M=\overset{5}{\underset{o}{Q}}$ die "Abbildung" $A: q\in\overset{5}{\underset{o}{Q}}\mapsto\hat{q}=r.q\in\overset{5}{\underset{o}{Q}}$, $r\in\mathbb{R}_o$, mit $r:=e^{tX}\in\mathbb{R}_+$, $t\in\mathbb{R}$, als Lie-Transformationsgruppe, d.h., die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}_+$, nämlich A, wird der oben erwähnten Lie-Transformationsgruppe G gleichgesetzt. Seien ferner $f\in C^\infty(\overset{5}{\underset{o}{Q}})$ und $q\in\overset{5}{\underset{o}{Q}}$. Der lineare Anteil von $f(e^\varepsilon q)$ bei der Entwicklung nach ε ist dann gegeben durch

$$\text{lin.Anteil von}\left\{\sum_\nu\frac{1}{\nu_0!\cdots\nu_5!}\,\frac{\partial^{\nu_0+\cdots+\nu_5}}{(\partial\eta^0)^{\nu_0}\cdots(\partial\eta^5)^{\nu_5}}f(q)(e^\varepsilon-1)^{\nu_0+\cdots+\nu_5}(\eta^0)^{\nu_0}\cdots(\eta^5)^{\nu_5}\right\}\text{ in }\varepsilon$$

$$=\eta^\mu\frac{\partial}{\partial\eta^\mu}f(q)\ .$$

Hieraus folgt, daß das von A auf $\overset{5}{\underset{o}{Q}}$ induzierte Vektorfeld ist. Bei der Ableitung haben wir tX einfach gleich $\varepsilon\in\mathbb{R}$ gesetzt, weil e^{tX} einfach eine positive reelle Zahl ist. Wäre nämlich z.B. $e^{tX}\in GL(n,\mathbb{R})$ mit $n>1$, dann können wir X^+ i.a. nicht mehr so einfach berechnen. Nach Anwendung der Projektion $\hat{\pi}$ auf $\overset{5}{\underset{o}{Q}}$ wirkt die multiplikative Gruppe A nicht mehr effektiv auf $\hat{\pi}(\overset{5}{\underset{o}{Q}})$. Sie stellt vielmehr eine Identitätstransformation auf $\hat{\pi}(\overset{5}{\underset{o}{Q}})$ dar. Das zu dieser durch die Identität repräsentierten 1-parametrigen Untergruppe gehörende Vektorfeld muß daher auf $\hat{\pi}(\overset{5}{\underset{o}{Q}})$ identisch verschwinden:

$$\hat{\pi}_*(\eta^\mu\partial_\mu)=0\quad\text{auf}\quad\hat{\pi}(\overset{5}{\underset{o}{Q}}) \tag{50}$$

Jetzt wenden wir uns $\Gamma^*(\hat{\Omega})$ zu. Um die Kotangentialräume $(\overset{5}{\underset{o}{Q}})^*_q$ und $\hat{\Omega}^*_{[q]}=(\hat{\pi}^*(\overset{5}{\underset{o}{Q}})^*_p$ (mit beliebigem $p\in[q]$) in Beziehung zu setzen, erinnern wir uns zunächst an die folgende

Definition (51)

Seien M und N C^∞-Mannigfaltigkeiten und $\phi : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung. Sei ω eine r-Form auf einer offenen Teilmenge $U \subset N$. Die auf der offenen Menge $\phi^{-1}(U) \subset M$ eindeutig bestimmte r-Form $\phi^* \omega$ ist dann gegeben durch

$$(\phi^* \omega)_q(X_1,..,X_r) := \omega_{\phi(q)}(\phi_* X_1,.., \phi_* X_r) \quad \forall\, q \in \phi^{-1}(U), X_i \in M_q$$

Mit dieser Definition (51) bekommt man dann in der bekannten Basis $\{dx^j_\alpha\}$ von $T^*(\Omega_\alpha)$ und mit $s^\mu(q)\partial_\mu \in \hat{T}(Q_o^5)$

$$(\psi_\alpha \circ \hat{\pi}_\alpha)^*(dx^j_\alpha)(s^\mu(q)\partial_\mu) = s^j(x_\alpha) - s_\alpha(x_\alpha).x^j_\alpha.$$

Als eine mögliche Lösung und wegen der Eindeutigkeit daher die einzige Lösung dieser Gleichung erhält man

$$(\psi_\alpha \circ \hat{\pi}_\alpha)^* dx^j_\alpha = (d\eta^j - \frac{\eta_j}{\alpha} d\alpha)/\alpha \quad ,$$

während das Lemma (40) uns zusätzlich

$$d\bar{\alpha} = (-\bar{\alpha}\, d\alpha + 2\,\eta_j d\,\eta^j)/\alpha$$

liefert.

Anstatt über $T^*_{[q]}(\hat{\Omega})$ haben wir hier immer über $T^*_x(\psi(\hat{\Omega}))$ gesprochen. Auf der lokalen Karte $\psi_\alpha(\hat{\Omega}_\alpha)$ brauchen wir nämlich die Elemente des Kotangentialraumes $\{a^j(x_\alpha)dx^j_\alpha\}$ nicht näher zu beschreiben, da sie aus dem Minkowskiraum und dem üblichen euklidischen Raum wohlbekannt sind.

3.3. Metrik auf $T(Q_o^5)$ und $T(\hat{\Omega})$.

Definition (52)

M sei eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Eine pseudo-Riemannsche Metrik (p.R.M.) ist ein Tensorfeld vom Typ (0,2) mit

i) $g(X,Y) = g(Y,X) \quad \forall\, X,Y \in T(M)$,

ii) Für jedes $p \in M$ ist g_p eine nichtentartete Bilinearform auf $M_p \times M_p$.

Eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit ist eine zusammenhängende C^∞-Mannigfaltigkeit mit einer p.R.M..

Definition (53)

Sei M eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit p.R.M. g. Sei (U, φ) Karte auf M mit $\varphi: q \in U \mapsto (x^1(q),..,x^m(q))$. Dann sind

i) $g^{ij} := g(\partial/\partial x^i,\ \partial/\partial x^j)$, $1 \le i,j \le m = \dim M$,

ii) $g_{ij}: \sum_{k=1}^{m} g_{ik} g^{kj} = \delta_{ij}$.

Die p.R.M. g auf $\mathbb{R}^6_o$, die man durch euklidisch-parallele Translation der nichtentarteten Bilinearform (3) zu jedem Punkt in $\mathbb{R}^6_o$ erhält [41], ist gegeben durch

$$g = g_{\mu\nu}\, d\eta^\mu \otimes d\eta^\nu = d\eta^0 \otimes d\eta^0 + d\eta^5 \otimes d\eta^5 - \sum_{i=1}^{4} d\eta^i \otimes d\eta^i$$

bezüglich einer Basis, in der $\eta = (\eta^0, \eta^1, .., \eta^5)$ ist,

bzw.

$$g = \sum_j d\eta^j \otimes d\eta^j - \tfrac{1}{2}\, d\alpha \otimes d\bar{\alpha} - \tfrac{1}{2}\, d\bar{\alpha} \otimes d\alpha \qquad (54)$$

bezüglich $\eta = (\eta^j, \alpha, \bar{\alpha})$.

Indem wir Q^5_o via der Einbettung $\iota : Q^5_o \to \iota(Q^5_o) \subset \mathbb{R}^6_o$ als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^6_o$ betrachten, berechnet sich die induzierte Metrik $\hat{g}$ auf der jeweiligen Karte $\hat{N}^5_\alpha$ von Q^5_o nach den Definitionen (51) und (53) zu

$$\hat{g}_q = \left(\hat{g}^{ij}_q \right) = \left((\iota^* g)_q (e^i_\alpha, e^j_\alpha) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\eta_0/\alpha \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\eta_1/\alpha \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\eta_2/\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\eta_3/\alpha \\ -\frac{\eta_0}{\alpha} & -\frac{\eta_1}{\alpha} & -\frac{\eta_2}{\alpha} & -\frac{\eta_3}{\alpha} & \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \end{pmatrix} \qquad (55)$$

falls z.B. $\alpha = \varkappa$ oder λ ist, sonst, falls $\alpha = \bar{\varkappa}$ oder $\bar{\lambda}$ ist, hat man darin nur die Indizes (0,1) gegen (5,4) zu vertauschen. Wegen $\det(\hat{g}^{ij}_q) = k(\alpha, q)/\alpha^2$, $q = (\eta^j, \alpha, \bar{\alpha}) \in \hat{N}^5_\alpha \subset Q^5_o$, ist die induzierte Metrik $\hat{g}$ auf Q^5_o aber singulär. Eine der Konsequenzen hierfür werden wir im Abschnitt 5 kennenlernen.

Die Metrik auf $T(\hat{\Omega})$ ist in den lokalen Koordinaten Ω_α gegeben durch

$$\tilde{g}_\alpha := dx^j_\alpha \otimes dx_{\alpha j} = dx^0_\alpha \otimes dx^0_\alpha - \sum_{i=1}^{3} dx^i_\alpha \otimes dx^i_\alpha \ . \qquad (56)$$

Sie ist nicht entartet. Auf $\psi_\varkappa(\hat{\Omega}_\varkappa) = \Omega_\varkappa$ wird sie mit der bekannten Minkowski-Metrik identifiziert.

Den Zusammenhang zwischen $\tilde{g}$ und $\hat{g}$ kann man aus den folgenden Gleichungen ablesen:

$$\tilde{g}_\alpha \, \pi_\alpha(q_\alpha)\left(\pi_{\alpha *}(X^{(\alpha)}_{q_\alpha}), \pi_{\alpha *}(X^{(\alpha)}_{q_\alpha})\right) \qquad (57)$$

$$= (dx^i_\alpha \otimes dx_{\alpha i})(A^j(x_\alpha)\,\partial/\partial x^j_\alpha \ , \ A^j(x_\alpha)\,\partial/\partial x^j_\alpha)$$

$$= a^j(x_\alpha) a_j(x_\alpha) - a_\alpha(x_\alpha) a_{\bar{\alpha}}(x_\alpha) \qquad \text{(Bem.: } a_{\bar{\alpha}} \text{ aus Gl.(48))}$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left(\alpha^2 \eta_{ij} \otimes d\eta^i - \frac{\eta_i}{\alpha} d\eta^i \otimes d\alpha - \frac{\eta_k}{\alpha} d\alpha \otimes d\eta^k + \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} d\alpha \otimes d\alpha\right)(X^{(\alpha)}_{q_\alpha}, X^{(\alpha)}_{q_\alpha})$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\, \hat{g}_{q_\alpha}(X^{(\alpha)}_{q_\alpha}, X^{(\alpha)}_{q_\alpha}) \ ,$$

d.h. es gilt $\quad (\pi_\alpha^* \tilde{g})_{q_\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}\, \hat{g}_{q_\alpha}$, $q_\alpha \in N_\alpha^5$. (58)

Für $\tilde{g}$ und g andererseits haben wir

$$(\pi_\alpha \circ \zeta_\alpha^{-1})_p^* \tilde{g} = \frac{1}{\alpha^2}\, g_p \ , \ p \in \mathbb{R}_o^6 \cap \iota(Q_o^5), \tag{59}$$

denn, es gilt für $a^\mu \partial_\mu \in \hat{T}_p(Q_o^5)$ - man beachte dabei den Definitionsbereich von " ζ_α^{-1} ", i.e. $\mathbb{R}_o^6 \cap \iota(\hat{N}^5)$, der mit dem Wertebereich von ζ_α zusammenfallen soll -

$$\begin{aligned}
&((\pi_\alpha \circ \zeta_\alpha^{-1})_p^* \tilde{g})(a^\mu \partial_\mu \ , \ a^\nu \partial_\nu) \qquad (60)\\
&= \tilde{g}_{(\pi_\alpha \circ \zeta_\alpha^{-1})(p)}((\pi_\alpha \circ \zeta_\alpha^{-1})_* a^\mu \partial_\mu \ , \ (\pi_\alpha \circ \zeta_\alpha^{-1})_* a^\nu \partial_\nu) \\
&= (dx_\alpha^i \otimes dx_{\alpha_i})(A^k(x_\alpha)\partial/\partial x_\alpha^k \ , \ A^j(x_\alpha)\partial/\partial x_\alpha^j) \quad \text{(Bem.: } A^j \text{ aus Gl.(47))} \\
&= \frac{1}{\alpha^2}(a^i(\eta)a_i(\eta) - a_\alpha(\eta)a_{\bar\alpha}(\eta)) \quad \text{(Bem.: } a_{\bar\alpha} \text{ aus Gl.(48))} \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\, g(a^\nu \partial_\nu \ , \ a^\mu \partial_\mu).
\end{aligned}$$

Dabei hat man in der letzten Zeile $a^\mu \partial_\mu = a^i(\iota_* e_i) + a_\alpha(\iota_* e_\alpha) - \frac{k(a,\eta)}{\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar\alpha}$ und dementsprechend $g = d\eta^i \otimes d\eta_i - \frac{1}{2}\, d\alpha \otimes d\bar\alpha - \frac{1}{2}\, d\bar\alpha \otimes d\alpha$ zu verstehen.

Selbstverständlich sind die obigen beiden Beziehungen (58) und (59) nicht unabhängig voneinander. In der Tat, aus der Gültigkeit von

$$\hat{g}_q = \iota_q^* g \tag{61}$$

(vgl.Gl.(55)), bzw., aus der Gültigkeit von

$$\hat{g}_{q_\alpha} = \zeta_{q_\alpha}^* g \tag{61'}$$

auf den lokalen Koordinaten kann man mit Hilfe von Gl.(59) die Beziehung (58) bekommen:

$$\frac{1}{\alpha^2}\, \hat{g}_{q_\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}\, \zeta_{q_\alpha}^* g = \zeta_\alpha^*((\pi_\alpha \circ \zeta_\alpha^{-1})_{q_\alpha}^* \tilde{g}) = (\pi_\alpha \circ \zeta_\alpha^{-1} \circ \zeta_\alpha)_{q_\alpha}^* \tilde{g} = \pi_{\alpha q_\alpha}^* \tilde{g}. \tag{62}$$

Die gewonnenen Beziehungen zwischen den hier behandelten Metriken sind für die spätere raum- zeit- oder lichtartige Charakterisierung der entsprechenden Tangentialraumelemente sowie für die Herstellung der Relationen zwischen ihnen sehr nützlich. Wir werden darauf zurückkommen.

3.4. Die physikalischen Anwendungen der Tangentialräume und der Vektorfelder.

3.4.1. Die Situation im Minkowskiraum.

Wir haben in unserer Arbeit angenommen, daß der Minkowskiraum M^4 zu einer 4-dimensionalen flachen pseudo-Riemannschen Mannigfal-

tigkeit $\mathbb{R}_1^4$ homöomorph ist. M.a.W., die Krümmung von Raum und Zeit durch schwere Massen soll vernachlässigbar sein. Auf einem solchen flachen Raum kann der Tangentialraum $T_x(\mathbb{R}_1^4)$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}_1^4$ mit dem $\mathbb{R}_1^4$ selbst identifiziert werden, und zwar mittels der Abbildung

$$\sigma_x : T_x(\mathbb{R}_1^4) \longrightarrow \mathbb{R}_1^4 \qquad (63)$$

$$t_x = a^j(x)\partial_j,\ a^j \in \mathbb{R} \mapsto (x') = (x^0 + a^0(x), .., x^3 + a^3(x)),$$

wobei $x = (x^0, .., x^3)$ beliebig aber fest gewählt ist, von dem der Diffeomorphismus σ_x abhängt. (Speziell für $x=0$ ist $\sigma_{x=0} \equiv \sigma$ zudem noch ein Isomorphismus.)

Die Metrik auf dem Tangentialraum $T_x(\mathbb{R}_1^4)$ ist gegeben durch $g_x = \tilde{g}_x$ aus der Gleichung (47). Es folgt dann für beliebige $a_j\partial^j \in T_x(\mathbb{R}_1^4)$, daß $g_x(a^j\partial_j, b^i\partial_i) = a^j b_j$ ist, da $dx^j(\partial_i) = \delta^j{}_i$ ist.

Die Klassifizierung der Punktmenge $\{x \mid x \in \mathbb{R}_1^4\}$, die zu einem bestimmten Punkt $x_0 \in \mathbb{R}_1^4$ raum-, zeit- bzw. lichtartig liegt, i.e. $(x-x_0)^j(x-x_0)_j < 0$, > 0, bzw. $=0$, kann anstatt im $\mathbb{R}_1^4$ nunmehr im Raum $T_x(\mathbb{R}_1^4)$ durchgeführt werden, weil σ_{x_0} eine bijektive Abbildung der beiden Räume darstellt. Dabei können die Elemente $a^j\partial_j$ von $T_x(\mathbb{R}_1^4)$ mit Hilfe der Metrik g_{x_0} in entsprechende raum-, zeit- und lichtartige Klassen (bezüglich des Ursprungs des Tangentialraumes) eingeteilt werden: $a^j a_j < 0$, > 0, bzw. $=0$. Diese Klassifizierung ist Poincaré- und dilatationsinvariant.

Was kann man mit dieser Identifizierung erreichen? Was sollen z.B. die Elemente $a^j\partial_j$ des Tangentialraumes $T_x(\mathbb{R}_1^4)$ physikalisch bedeuten. - Wir beantworten zunächst die 2. Frage: Sei nun $\overset{0}{x}$, das einem physikalischen Ereignis $\overset{0}{E}$ entsprechen möge, der Ursprung eines 4-achsigen Koordinatensystems im Minkowskiraum. Von diesem Ursprung aus wollen wir die anderen physikalischen Ereignisse beobachten, indem wir die Zahlen $(x-\overset{0}{x})$ zu seiner Kennzeichnung verwenden wollen. Es steht uns dafür ein Reservoir von Maßstäben, z.B. die Energieniveauintervalle des Wasserstoffatoms, zur Verfügung, um die Zahlen zu bekommen. Aber, wie und wo soll man messen? Nun, ein gewisses Ereignis E' scheint uns aus irgendeinem Grund, z.B. die Häufigkeit seines Auftauchens, geeignet zu sein, um die entsprechende Größe $(x^j - \overset{0}{x}{}^j)$ als Einheit e^j in der j-ten Koordinate zu verwenden. Wir ordnen diese Einheit e^j dem ∂_j im $T_x(\mathbb{R}_1^4)$ zu. M.a.W., ∂_j soll physikalisch als die Einheit des Maßstabes längs der j-ten Koordinate des Tangentialraumes interpretiert werden, da $\{\partial_j\}$ und $\{e^j\}$ Basis in den jeweiligen Räumen

darstellen. a^j bekommt dann in diesem Zusammenhang die Bedeutung der Maßzahlen (und zwar bezüglich jenes Einheitsmaßstabes) in dem Tangentialraum. Hiernach ist es klar, daß $a^j\partial_j$ selbst wie ∂_j ebenfalls ein Maßstab ist. Die verschiedenen Elemente von $\mathfrak{L}_x(\mathbb{R}^4_1)$ können somit als verschiedene Maßstäbe angesehen werden. $\mathfrak{L}_x(\mathbb{R}^4_1)$ ist also ein "Maßstabsraum", was seine Elemente betrifft; ein Raum, in dem die Messung durchgeführt wird, wenn man ihn mit dem Minkowskiraum in Verbindung setzt, wobei $\{(a^j)\}$ mittels der Identifizierung $\sigma_{\bar{x}}$ die physikalischen Ereignisse auf indirekte Weise beschreiben. Jetzt wenden wir uns der 1. Frage zu. Solange man die Physik auf dem flachen Minkowskiraum betreibt, liefert unsere Interpretation über die Tangentialräume im Grunde nichts Neues, da der Minkowskiraum die gleiche Struktur wie sein Tangentialraum hat. Die Situation ändert sich aber, sobald wir die Physik auf $\mathcal{C}^4$ machen wollen. Die Struktur dieser Mannigfaltigkeit kann nicht mehr mit der eines seiner Tangentialräume gleichgesetzt werden, so daß die im Falle des Minkowskiraumes als überflüssig erscheinende Idee ihre wahre Nützlichkeit hier zeigen kann, wie wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit noch sehen werden. (Näheres und genauere Behandlung der 2. Frage siehe Ref.[29]).

3.4.2. Die globale Situation in $\mathbb{T}(Q^5_o)$.

Auf der Mannigfaltigkeit Q^5_o ist es unmöglich, eine globale Identifizierung zwischen ihr und einem ihrer Tangentialräume vorzunehmen, wie man es im Minkowskiraum machen konnte. Jede Identifizierungsabbildung

$$f_p: \{p\} \times (Q^5_o)_p \ni (p,a) \longmapsto q = f_p(p,a) \in Q^5_o, \quad p \in Q^5_o$$

unterliegt nämlich den Nebenbedingungen

$$k(p,p)=0, \quad k(a,p)=0, \quad k(q,q)=0,$$

so daß man bei dem einfachsten Ansatz

$$q = f_p(p,a) := p + a$$

schon Schwierigkeiten hat, wenn $k(a,a)\neq 0$ ist, dann liegt q nicht mehr auf Q^5_o. Es gelingt uns zwar, eine andere Identifizierungsabbildung anzugeben, sie ist jedoch nur lokal definiert. (vgl. 3.4.3. für ausführliche Diskussion). Der obige einfache Ansatz

erlaubt uns trotzdem eine partielle Identifizierung, wenn nur diejenige Teilmenge des Tangentialraumes $T_p(Q_o^5)$ betrachtet wird, die lichtartig (bezüglich des Ursprunges von $T_p(Q_o^5)$) ist: $k(a,a)=0$, und dementsprechend diejenige Teilmenge aus Q_o^5, die ebenfalls lichtartig (bezüglich p) ist. Im einzelnen ist die Argumentation wie folgt:

Sei p ein beliebiger aber fester Punkt von Q_o^5, ferner sei

$$\hat{L}(p):=\{q \in Q_o^5,\ k(q,p)=\eta^{\mu}(q;p)\xi_{\mu}(p)=0,\ p=(\xi^{\mu}),\ q=(\eta^{\mu})\} \quad (64)$$

die Menge aller Punkte aus Q_o^5, die lichtartig zu p liegen. Sei

$$\hat{H}(p):=\{a^{\mu}(p)\partial_{\mu} \in T_p(Q_o^5),\ k(a,a)=0,\ a^{\mu}(p)+\xi^{\mu}(p)\neq 0,\ p=(\xi^{\mu})\} \quad (65)$$

die Menge aller lichtartigen Tangentialvektoren in $T(Q_o^5)_p\backslash\{-\xi^{\mu}\partial_{\mu}\}$. Dann können wir eine bijektive Abbildung

$$\chi \ : \hat{H}(p) \rightarrow \hat{L}(p) \quad (66)$$

wie folgt angeben:

$$\chi \ : a^{\mu}(p)\partial_{\mu} \mapsto \eta^{\mu}(q;p):=\xi^{\mu}+a^{\mu}(p), \text{ mit } p=(\xi^{\mu}),\ q=(\eta^{\mu}(q;p)),$$

$$\chi^{-1}: \eta^{\mu}(q;p) \mapsto a^{\mu}(p)\partial_{\mu}:\ a^{\mu}(p):=\eta^{\mu}(q;p)-\xi^{\mu}.$$

Wir bemerken, daß weder $\hat{H}(p)$ noch $\hat{L}(p)$ lineare Räume sind, weil $(a^{\mu}+b^{\mu})\partial_{\mu}$ i.a. kein Element von $\hat{H}(p)$ ist, auch wenn $a^{\mu}\partial_{\mu}$ und $b^{\mu}\partial_{\mu}$ aus $\hat{H}(p)$ sind; das gleiche gilt für c_1+c_2, falls c_1, c_2 aus $\hat{L}(p)$ sind. Die Menge $\hat{L}(p)$ ist im folgenden Sinne symmetrisch definiert: $p \in \hat{L}(q)$ falls $q \in \hat{L}(p)$.

Die topologische Struktur von $\hat{L}(p)$ können wir aus folgender Überlegung einsehen: O.B. sei $p=(\xi^j=0,\varkappa(p)\neq 0,\lambda(p)=0)$. Die Koordinaten des Punktes $q \in \hat{L}(p)$ genügen dann der Beziehung (12) mit $\eta^4+\eta^5=0$, d.h. es gilt $(\eta^0)^2=\sum_{i=1}^{3}(\eta^i)^2$, $\varkappa(q) \in \mathbb{R}$, $\lambda(q)=0$. Hieraus ersieht man sofort, daß $\hat{L}(p)\backslash\{p\}\sim S^2 \times \mathbb{R}_o \times \mathbb{R}$ ist.

Als weiteren Schritt wollen wir die Bilder von $\hat{L}(p)$ und $\hat{H}(p)$ unter der Projektion $\hat{\pi}$ studieren, die für die Behandlung der Frage der Kausalität einer konform-invarianten Welt von besonderer Wichtigkeit sind.

3.4.3. Die globale Situation in $T(M_c^4)$.

Nach dem Lemma (49) wissen wir, daß die Projektion $\hat{\pi}_*(Y)$ eines Vektorfeldes $Y = a^{\mu}(.)\partial_{\mu}$ auf Q_o^5 genau dann ein Vektorfeld auf M_c^4 liefert, wenn Y A-invariant ist. Die Existenz eines solchen

A-invarianten Vektorfeldes, das einen beliebig vorgegebenen Wert (als Tangentialvektor) an einem beliebigen Punkt der Mannigfaltigkeit Q_o^5 annimmt, kann man wie folgt zeigen:

Da S^1 und S^3 bekanntlich parallelisierbar sind und Q_o^5 homöomorph zu $S^1 \times S^3 \times \mathbb{R}$ ist, erhält man, daß Q_o^5 ebenfalls parallelisierbar ist. Wir geben fünf solche Vektorfelder an, die zudem noch A-invariant sind:

$$\hat{s}_i(q) := \hat{s}_i^\mu(q)\,\partial/\partial\eta^\mu, \quad i=1,2,..,5 \tag{67}$$

mit
$$(\hat{s}_1^\mu(q)) = (0, -\eta^2, +\eta^1, +\eta^4, -\eta^3, 0)$$
$$(\hat{s}_2^\mu(q)) = (0, -\eta^3, -\eta^4, +\eta^1, +\eta^2, 0)$$
$$(\hat{s}_3^\mu(q)) = (0, -\eta^4, +\eta^3, -\eta^2, +\eta^1, 0)$$
$$(\hat{s}_4^\mu(q)) = (-\eta^5, 0, 0, 0, 0, +\eta^0)$$
$$(\hat{s}_5^\mu(q)) = (\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4, \eta^5)$$

wobei
$$q = (\eta^\mu) = (\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4, \eta^5) \in Q_o^5$$

ist. Sie genügen der Orthogonalitätsrelation für $q \in Q_o^5$

$$g(\hat{s}_i(q), \hat{s}_j(q)) = \begin{cases} -((\eta^0)^2+(\eta^5)^2)\,\delta_{ij} & \text{für } i,j = 1,2,3 \\ +((\eta^0)^2+(\eta^5)^2)\,\delta_{ij} & \text{für } i \text{ oder } j = 4 \\ 0 & \text{für } i \text{ oder } j = 5 \end{cases} \tag{68}$$

sowie der notwendigen Bedingung für Vektorfelder auf Q_o^5 bzw. M_c^4

$$\hat{s}_i^\mu(q)\cdot\eta_\mu = 0, \quad i=1,2,..,5.$$

(Wir haben bei der Gl.(68) die Relation (61) benutzt und verwenden direkt g anstatt $\hat{g}$ als Metrik auf Q_o^5, in Übereinstimmung mit der Darstellung von $\hat{s}_i(q)$.) Wegen der linearen Unabhängigkeit der $\hat{s}_i(q)$, die in Gl.(68) ausgedrückt wurde, kann man sie als Basis des 5-dimensionalen Tangentialraumes $(Q_o^5)_q$, $q \in Q_o^5$, nehmen. Zu jedem vorgegebenen $X_p = a^\mu(p)\partial_\mu \in (Q_o^5)_p$, $p \in Q_o^5$, kann man folglich die entsprechenden fünf Koeffizienten $t_i \in \mathbb{R}$ aus $X_p = \sum_{i=1}^{5} \hat{s}_i(p) t_i$ eindeutig bestimmen. Mithin ist das gesuchte Vektorfeld aus $\mathcal{A}(Q_o^5)$ von der allgemeinen Gestalt

$$\hat{s}(.) = \sum_{i=1}^{5} t_i\, \hat{s}_i(.), \quad t_i \in \mathbb{R}$$

Neben diesen Vektorfeldern gibt es überabzählbar viele Vektorfelder mit den genannten Eigenschaften. So nimmt z.B. mit $\hat{s}(.) = \sum_{i=1}^{5} t_i \hat{s}_i$ auch das A-invariante Vektorfeld $\hat{s}'(.) := f(.)\hat{s}(.)/f(p)$ an der Stelle p den vorgegebenen Wert X_p an, wobei f(q) differenzierbar, homogen vom 0-ten Grad in q und $f(p) \neq 0$ ist.

Wir geben nun eine Teilmenge dieser A-invarianten Vektorfelder an, die in eineindeutiger Beziehung zu $\hat{H}(p)$ steht, nämlich:

$$\hat{H}^{(1)} := \left\{ \hat{s}(.) = \sum_{i=1}^{5} t_i \hat{s}_i(.),\ t_i \in \mathbb{R},\ (t_i) \neq (0,0,0,0,-1),\ \sum_{i=1}^{3} (t_i)^2 = (t_4)^2 \right\} \quad (69)$$

Die bijektive Abbildung zwischen $\hat{H}^{(1)}$ und $\hat{H}(p)$ ist gegeben durch:

$$\tau_p: \quad \hat{H}(p) \rightarrow \hat{H}^{(1)} \quad (70)$$

$$X_p \longmapsto \hat{s}(.) = \sum_{i=1}^{5} t_i \hat{s}_i(.) \quad \text{mit } (t_i): \hat{s}(p) = X_p$$

bzw. $\tau_p^{-1}: \quad \hat{H}^{(1)} \rightarrow \hat{H}(p)$

$$\hat{s}(.) = \sum_{i=1}^{5} t_i \hat{s}_i(.) \longmapsto \hat{s}(p) = X_p .$$

Da allgemein für ein Vektorfeld $\hat{s}(.) = \sum_{i=1}^{5} t_i \hat{s}_i(.)$ die Beziehung

$$\operatorname{sgn} g_q(\hat{s}(q), \hat{s}(q)) = \operatorname{sgn}((t_4)^2 - \sum_{i=1}^{3} (t_i)^2) \text{ für alle } q \in Q_o^5$$

gilt, wird die Raum-, Zeit- oder Lichtartigkeit des Vektorfeldes $\hat{s}(.)$ durch die einmalige Vorgabe der Koeffizienten (t_i) ein für allemal festgelegt. Diese Koeffizienten (t_i) sind durch die Forderung $\hat{s}(q) = \xi_q$ festgelegt, wobei ξ_q als vorgegebener Tangentialvektor an der Stelle q zu verstehen ist. Hiernach repräsentiert $\hat{H}^{(1)}$ ebenso wie die in dem Beispiel erwähnten Vektorfelder $\hat{s}'(.)$ eine Menge von lichtartigen Vektorfeldern, die an jedem Punkt der Mannigfaltigkeit den vorgegebenen Wert annehmen. Die Bijektivität der Abbildung τ_p basiert nicht nur auf der Lichtartigkeit von $\hat{H}^{(1)}$, sondern auch auf der Forderung, daß die Elemente von $\hat{H}^{(1)}$ in der Darstellung mittels der Basis $\hat{s}_i(.)$ reine reelle Koeffizienten haben müssen. Die Bijektivität berechtigt uns dann, jedes Element von $\hat{H}(p)$ als den Wert eines (durch τ_p eindeutig bestimmten) global A-invarianten lichtartigen Vektorfeldes auf Q_o^5 an der Stelle $p \in Q_o^5$ anzusehen.

Die Hintereinanderführung der Abbildungen τ_p^{-1} und χ_p liefert uns eine neue bijektive Abbildung $\chi_p^{(1)}$:

$$\chi_p^{(1)} \equiv \chi_p \circ \tau_p^{-1}: \quad \hat{H}^{(1)} \rightarrow \hat{L}(p) \quad (71)$$

$$\hat{s} = \hat{s}^\mu(.)\partial_\mu \longmapsto \eta^\mu(c;p) = \xi^\mu(p) + \hat{s}^\mu(p)$$

mit der Inversen

$$\chi_p^{(1),-1}: \quad \hat{L}(p) \rightarrow \hat{H}^{(1)}$$

$$\eta^\mu(c;p) \longmapsto \hat{s}^\mu(.)\partial_\mu: \ \hat{s}^\mu(p) = \eta^\mu(c;p) - \xi^\mu(p).$$

Eine bijektive Abbildung von $\hat{H}(p)$ in $\hat{H}(rp)$, $r \in \mathbb{R}_o$, entsteht ebenfalls bei der Zusammensetzung der Abbildungen τ_p, τ_{rp} mit der Abbildung $A: q \in Q_o^5 \longmapsto rq \in Q_o^5$, $r \in \mathbb{R}_o$:

$$\tau_{rq}^{-1} \circ A_* \circ \tau_q: \ \hat{s}^\mu \partial_\mu \in \hat{H}(p) \longmapsto \hat{s}^\mu \partial_\mu \in \hat{H}(rp) \quad \text{mit } \hat{s}^\mu = r.\hat{s}^\mu \quad (72)$$

Aus der A-Invarianz von $\hat{H}^{(1)}$ erhält man ferner

$$\chi^{(1)}_{rp} = r \cdot \chi^{(1)}_{p} \quad , \tag{73}$$

da für $\chi^{(1)}_{rp}$: $\hat{s}^\mu(.)\partial_\mu \in \hat{H}^{(1)} \longmapsto \eta^\mu(q; rp) \in \hat{L}(rp)$

das folgende gilt: $\eta^\mu(q;rp) \equiv \chi^{(1)}_{rp}(\hat{s}^\mu(.)\partial_\mu) = (rp)^\mu + \hat{s}^\mu(rp) =$

$= r\,\xi^\mu(p) + r\,\hat{s}^\mu(p) = r(\xi^\mu(p) + \hat{s}^\mu(p))$

$= r\,\eta^\mu(q;p) = r\,\chi^{(1)}_{p}(\hat{s}^\mu(.)\partial_\mu)$. $\quad (p = (\xi^\mu(p)))$.

Man kann Gl.(73) als einen äquivalenten Ausdruck für die mengentheoretisch einleuchtende Gleichheit zwischen $\hat{L}(p)$ und $\hat{L}(rp)$ ansehen, weil sie äquivalent zu $r\hat{L}(p) = \hat{L}(rp)$ ist, wie man aus den obigen Ableitungen ersieht.

Die bisherigen Studien zielen darauf hin, eine Relation zwischen den lichtartigen Tangentialvektoren an der Stelle $x \in M^4_C$ und den lichtartig zu x liegenden Punkten $y \in M^4_C$ (also eine ähnliche Relation wie die σ_x (Gl.(56)) im Minkowskiraum) herzustellen. Hierfür brauchen wir nach dem Lemma (49) vor allem ein A-invariantes Vektorfeld auf $\hat{\zeta}^5_0$, da nur solch ein Vektorfeld nach der Projektion $\hat{\pi}_{\mathbb{E}}$ ein Vektorfeld auf $\hat{\zeta}^5_0/A \equiv \hat{\Omega}$ liefern kann. Nachdem die Existenz eines solchen Vektorfeldes gesichert ist, konstruieren wir die Teilmenge $\hat{H}^{(1)}$, die nur lichtartige A-invariante Vektorfelder enthält. Als nächsten Schritt haben wir nun die Projektion $\hat{\pi}_{\mathbb{E}}$ anzuwenden. Wir erhalten dann einerseits für $p \in \hat{\Sigma}^5_\alpha$ und $\hat{s}(.) \in \hat{H}^{(1)}$

$$\pi_{\alpha\mathbb{E}}(\,\hat{s}^\mu(.)\partial_\mu|_{p_\alpha}) = S^j(x_\alpha)\cdot\partial/\partial x^j_\alpha \in H(\pi_{\mathbb{E}}(p_\alpha) \equiv x_\alpha), \tag{74}$$

wobei $\quad H(\hat{\pi}(p)) = (\hat{\pi}_{\mathbb{E}}(\hat{H}^{(1)}))_p$

und $\quad S^j(x_\alpha)\cdot\partial/\partial x^j_\alpha \equiv (\hat{s}^j(x_\alpha) - x^j_\alpha\,\hat{s}_\alpha(x_\alpha))\cdot\partial/\partial x^j_\alpha$

ebenfalls wie $\hat{s} \in \hat{H}^{(1)}$ lichtartig sind, (d.h. es gilt $S^j S_j = 0$, wie man mit Hilfe von $\hat{s}^\mu(.)\hat{s}_\mu(.) = 0$ und $\hat{s}^\mu(p)\,\xi_\mu = 0$ leicht bestätigen kann.

Andererseits stellt die Zusammensetzung von $\chi^{(1)}_p$ und $\hat{\pi}$ eine Relation zwischen $\hat{H}^{(1)}$ und $\hat{\pi}(\hat{L}(p)) = \hat{L}(\hat{\pi}(p))$ wie folgt her: Sei $\hat{s}^\mu(.)\partial_\mu \in \hat{H}^{(1)}$ und $p \in \hat{\Sigma}^5$. Die Anwendung von $\chi^{(1)}_p$ auf $\hat{s}^\mu(.)\partial_\mu$ ergibt $\eta^\mu(q;p) = (\xi^\mu)^\mu + \hat{s}^\mu(p)$. Falls nun $p \in \hat{\Sigma}^5_\alpha$, d.h. $\hat{s}_\alpha(p) - \alpha(p) = 0$ ist, so ergibt die Anwendung der Projektion π_α schließlich

$$x'^j_\alpha = \frac{\hat{s}^j(p) + \xi(p)^j}{\hat{s}_\alpha(p) + \alpha(p)} = \frac{\hat{s}^j(x_\alpha) + x^j_\alpha}{1 + \hat{s}_\alpha(x_\alpha)} \quad . \tag{75}$$

Wir haben also

$$\hat{\pi}_\alpha \circ \chi^{(1)}_p : \hat{H}^{(1)} \ni \hat{s}^\mu(.)\partial_\mu \longmapsto x'^j_\alpha \in \hat{L}(\hat{\pi}(p)) \ .$$

Die Verbindung der beiden Schritte (74) und (75) gibt uns eine Teilantwort auf die von uns gestellte Frage und zwar für den Fall, daß $x \in \overset{4}{\mathcal{C}}$ und $x' \in \overset{4}{\mathcal{C}}$ in einer Koordinatenumgebung $\hat{\Omega}_\alpha \subset \hat{\Omega}$ liegen:

$$x'^j_\alpha - x^j_\alpha = S^j(x_\alpha)/(1+\hat{s}_\alpha(x_\alpha)) \qquad (76)$$

Die Gl.(76) stellt eine Verallgemeinerung

$$\widetilde{\sigma}_{\hat{\pi}(p)} : \hat{\pi}_*(\hat{T}^{(1)})_p \equiv H(\hat{\pi}(p)) \longrightarrow \hat{\pi}(\hat{L}(p)) \equiv L(\hat{\pi}(p)) \qquad (77)$$

der Abbildung σ_α in Gl.(63) dar, weil $\hat{s}_\alpha|_{\alpha=\text{konst.}} = 0$ für α = konst. ist.

Die andere Möglichkeit, $\eta \in \hat{N}^5_\beta \setminus \hat{\Omega}^5_\alpha$, $\beta \in Z \setminus \alpha$, bedeutet $\hat{s}_\beta(p) + \beta(p) \neq 0$ und $\hat{s}_\alpha(p) + \alpha(p) = 0$ bzw. $\hat{s}_\alpha(x_\alpha) = -1$. Damit wird $S^j(x_\alpha) = \hat{s}^j(x_\alpha) + x^j_\alpha$ und $\hat{s}_{\bar{\alpha}}(x_\alpha) = -\hat{s}^j(x_\alpha)\hat{s}_j(x_\alpha) = x^j_\alpha \hat{s}_j + 2\, x^j_\alpha \hat{s}_j(x_\alpha)$. Die Anwendung der Projektion π_β ergibt schließlich

$$x'^j_\beta = \frac{\xi^j + \hat{s}^j(p)}{\beta(p) + \hat{s}_\beta(p)} = \frac{x^j_\alpha + \hat{s}^j(x_\alpha)}{\beta/\alpha + \hat{s}_\beta(x_\alpha)} = \frac{S^j(x_\alpha)}{\beta/\alpha + \hat{s}_\beta(x_\alpha)} \,. \qquad (78)$$

Die beiden Relationen (76) und (78) ergeben eine vollständige "Antwort" auf unsere Frage. Bevor wir diese Antwort näher diskutieren, stellen wir fest, daß $x'^j_{\bar{\alpha}} x'_{\bar{\alpha}j} =$ ist, d.h. $x'_{\bar{\alpha}}$ ist lichtartig bezüglich des Trägers des Raumes $\mathbb{R}^4_{\bar{\alpha}} \equiv \Omega_{\bar{\alpha}}$. Für $\beta = \bar{\alpha}$ kann man x'^j vollständig durch die Argumente der Abbildung ausdrücken:

$$x'^j_{\bar{\alpha}} = \frac{x^j_\alpha + \hat{s}^j(x_\alpha)}{x^j_\alpha x_{\alpha j} + \hat{s}_{\bar{\alpha}}(x_\alpha)} = \frac{S^j(x_\alpha)}{2\, x^j_\alpha S_j(x_\alpha)} \,, \quad \alpha \in Z. \qquad (79)$$

Das gleiche kann man für x'_β aus den anderen Karten $\hat{\Omega}_\beta$, $\beta \in Z$, $\beta \neq (\alpha, \bar{\alpha})$, durchführen.

Wir fassen die bisher angegebenen Abbildungen im folgenden Diagramm zusammen:

$$\begin{array}{ccccc} T(\mathcal{C}^5_o) \supset \hat{T}(\mathcal{C}^5_o) \supset \hat{H}^{(1)} & \xrightarrow{\hat{\pi}_{*p}} & H(\hat{\pi}(p)) \subset \hat{\pi}_*(\hat{T}_q(\mathcal{C}^5_o)) \equiv (\hat{\Omega})_{[p]} & & \\ \Big\downarrow \chi^{(1)}_p & & \Big\downarrow \widetilde{\sigma}_{\hat{\pi}(p)} & & \\ \mathcal{C}^5_o \supset \hat{T}(\mathcal{C}^5_o) & \xrightarrow{\hat{\pi}} & L(\hat{\pi}(p)) \subset \hat{\pi}(\mathcal{C}^5_o) \equiv \hat{\Omega} & & \end{array}$$

Die Abbildung $\chi^{(1)}_p$ und die in 3.4.2. behandelte Abbildung χ_p sind beide von globaler Natur, d.h. sie stellen eine Beziehung zwischen einer lichtartigen Teilmenge aus $(\mathcal{C}^5_o)_p$ und den zu p lichtartig liegenden Punkten in $\mathcal{C}^5_o$ her. Bei der durch $\hat{\pi} \circ \chi^{(1)}_p \circ \hat{\pi}^{-1}_*$ (!) erst definierten Abbildung $\widetilde{\sigma}_{\hat{\pi}(p)}$ ist dies etwas anders zu verstehen:
Für p,q aus der gleichen Karte $\hat{\Omega}^5_\alpha$ stellt $\widetilde{\sigma}_{\hat{\pi}(p)}$ fast die gleiche Relation zwischen $H(\hat{\pi}\, p)$ und $L(\hat{\pi}\, p)$ her wie $\chi^{(1)}_p$ zwischen $\hat{T}^{(1)}$ und $\hat{T}(p)$ leistet, nämlich

$$S^j(x_\alpha) \longrightarrow x'^j_\alpha = x^j_\alpha + S^j(x_\alpha)/(1 + \hat{s}_\alpha(x_\alpha)).$$

Die Lichtartigkeit von x'_α bezüglich x_α kann man hier wie dort direkt verifizieren. Die Abbildung $\widetilde{\sigma}_{\hat{\pi}(p)}$ ist jedoch nicht eineindeutig, wie man wegen " $\hat{\pi}_*^{-1}$ " schon voraussehen konnte. In der Tat, bei den vorgegebenen x'_α und x_α stellen überabzählbar viele Elemente von $H(\hat{\pi}(p))$, nämlich $S^j(x_\alpha) = t\,(x'^j_\alpha - x^j_\alpha)$, $\hat{s}_\alpha(x_\alpha) = t - 1$, $t \in \mathbb{R}_0$, die Urbildmenge von x'_α dar. Denn aus

$$x'^j_\alpha = \frac{\hat{s}^j(x_\alpha) + x^j_\alpha}{1 + 0} = \frac{\hat{s}^j(x_\alpha) + x^j_\alpha}{1 + \hat{s}_\alpha(x_\alpha)} \qquad (81)$$

folgt $\hat{s}_\alpha(x_\alpha) = t - 1$ und $\hat{s}^j(x_\alpha) = t x'^j_\alpha - x^j_\alpha$, für alle $t \in \mathbb{R}_0$. Durch die Abbildung $\widetilde{\sigma}_{\hat{\pi}(p)} \circ \hat{\pi}_*$ werden somit überabzählbar viele Tangentialvektoren aus $\hat{H}(p) = \hat{H}^{(1)}|_p$ auf einen Bildpunkt in $L(\hat{\pi}(p))$ abgebildet. Bei der späteren Diskussion über die Zeitordnung auf $\hat{\Omega}$ werden wir auf diesen Punkt zurückkommen.

ii) Für q,p aus verschiedenen Karten finden wir keine ähnliche Beziehung mehr, wie die zwischen $\hat{H}^{(1)}$ und $\hat{L}(p)$ (vgl.Gl.(78) und (79)). Ebenso kann man nicht einmal die Lichtartigkeit von x'_β bezüglich x_α nachprüfen. So ergibt z.B. die reine numerische Auswertung von $(x'^j_\beta - x^j_\alpha)(x'_{\beta j} - x_{\alpha j})$ das Ergebnis $x^j_\alpha x_{\alpha j} - 1$. Da aber $x_\alpha \in \pi_\alpha(\mathbb{R}^5_\alpha)$ und $x'_\beta \in \pi_\beta(\mathbb{R}^5_\beta)$ Elemente zweier verschiedener Räume sind, hat die obige Differenzenbildung $(x'_\beta - x_\alpha)$ keinen Sinn. Wie im Falle i) sieht man ferner, daß durch $\widetilde{\sigma}_{\hat{\pi}(p)}$ überabzählbar viele Punkte auf einen Bildpunkt abgebildet werden.

Wenn wir sagen, $\widetilde{\sigma}_{\hat{\pi}(p)}$ hat die ähnliche globale Eigenschaft wie $\chi^{(1)}_p$ (bzw. χ_p), dann verstehen wir diese Aussage folgendermaßen: Die Elemente $\hat{\pi}(p) \in [p]$ und $\hat{\pi}(q(p)) \in [q(p)]$ von $Q^5_0/A \equiv \hat{\Omega}$ stehen im(raum-, zeit- bzw.)lichtartigen Verhältnis zueinander, wenn beliebige Repräsentanten von [p] und [q(p)] in der gleichen Relation (i.e.(Raum-, Zeit-, bzw.)Lichtartigkeit) auf Q^5_0 zueinander stehen. Eine Interpretation, die angesichts der Abbildung $\hat{\pi}: \hat{L}(p) \longrightarrow L(\hat{\pi}(p))$ konsistent sein dürfte.

Die bisher untersuchte globale Eigenschaft gilt nicht für die Elemente p und q aus Q^5_0, die sich zueinander raum- oder zeitartig befinden, da es uns nicht gelang, eine global geltende, konforminvariante Relation (wie $\chi^{(1)}_p$) zwischen Punktepaaren auf Q^5_0 mit dieser Eigenschaft und Tangentialvektoren in dem betreffenden Tangentialraum mit der gleichen Eigenschaft herzustellen. Aber lokal ändert sich die Situation:

3.4.4. Die lokale Situation im $T(Q_o^5)$ und $T(M_c^4)$.

Sei $p \in \hat{N}^5_{\mathscr{K}}$ und $a^\mu(p)\partial_\mu \in (\hat{N}^5_{\mathscr{K}})_p$. Wir wollen zeigen, daß es stets eine Umgebung $\hat{U}(p) \subset \hat{N}^5_{\mathscr{K}}$ und eine Umgebung $\hat{V}_p(a^\mu(p)=0) \subset (\hat{N}^5_{\mathscr{K}})_p$ gibt, so daß man einen lokalen Diffeomorphismus

$$\hat{\chi}_p : \hat{V}_p(0) \to \hat{U}(p), \quad \text{bzw.} \quad \hat{\chi}_p^{-1} : \hat{U}(p) \to \hat{V}_p(0)$$

bekommt. Dieser Diffeomorphismus wird gegeben durch

$$\hat{\chi}_p : a^\mu(p)\partial_\mu \in \hat{V}_p(0) \mapsto \begin{cases} \eta^j(q) = \mathscr{K}(q)\left(\frac{(\xi(p))^j}{\mathscr{K}(p)}\left(1 - \frac{a_{\mathscr{K}}(p)}{\mathscr{K}(p)}\right) + \frac{a^j(p)}{\mathscr{K}(p)}\right) \\ \mathscr{K}(q) = \mathscr{K}(p) + a_{\mathscr{K}}(p) \end{cases}$$

bzw.

$$\hat{\chi}_p^{-1} : \eta(q) \mapsto \begin{cases} a^j(p) = \mathscr{K}(p)\left(\frac{(\eta(q))^j}{\mathscr{K}(q)} - \frac{(\xi(p))^j}{\mathscr{K}(p)}\right) + \frac{(\xi(p))^j}{\mathscr{K}(p)}(\mathscr{K}(q)-\mathscr{K}(p)) \\ a_{\mathscr{K}}(p) = \mathscr{K}(q) - \mathscr{K}(p) \end{cases} \tag{83}$$

Seine Konstruktion verläuft wie folgt: Mit Rücksicht auf den lokalen Charakter der Überlegungen ist es keine Einschränkung, die Angelegenheit zuerst einmal im $T(M_c^4) \leftrightarrow M_c^5$ anstatt $T(Q_o^5) \leftrightarrow Q_o^5$ zu betrachten. Wenn man daher den Ansatz

$$\mathrm{sgn}(A^j A_j) = \mathrm{sgn}((x'-x)^j(x'-x)_j);\ x = \Psi \circ \hat{\pi}(p),\ x' = \Psi \circ \hat{\pi}(q)$$

macht, dann wird die gewünschte Korrespondenz zwischen raum-, zeit- oder lichtartig zueinander liegenden Punkten der beiden Räumen $T_X(\Omega_{\mathscr{K}})$ und $\Omega_{\mathscr{K}}$ hergestellt. Um diesen Ansatz zu befriedigen, ist es hinreichend, $x'^j - x^j = A^j(x)$ zu fordern. Diese Forderung ist aber gerade Gl.(82), wobei $\mathscr{K}(q) = a_{\mathscr{K}}(p) + \mathscr{K}(p)$ einfach gesetzt wird.

Um die Umgebungen $\hat{U}(p) \subset \hat{N}^5_{\mathscr{K}}$ und $\hat{V}_p(0) \subset (\hat{N}^5_{\mathscr{K}})_p$ anzugeben, die die Rolle des Definition- bzw. Wertebereiches von $\hat{\chi}_p$ oder $\hat{\chi}_p^{-1}$ übernehmen sollen, erinnern wir an die Beziehung

$$(x'-x)^j(x'-x)_j = (\eta - \xi)^\mu(\eta - \xi)_\mu / \mathscr{K}(p)\mathscr{K}(q);\ p = (\xi^\mu),\ q = (\eta^\mu),$$

und (vgl.Gl.(59))

$$A^j A_j = \hat{s}^\mu \hat{s}_\mu / \mathscr{K}\cdot\mathscr{K}\,.$$

Daraus bekommt man die Gleichungen

$$\mathrm{sgn}(\hat{s}^\mu \hat{s}_\mu) = \mathrm{sgn}(A^j A_j) = \mathrm{sgn}((x'-x)^2) = \mathrm{sgn}((\eta - \xi)^2/\mathscr{K}'\mathscr{K}) \tag{84}$$

Damit aber $\mathrm{sgn}(\hat{s}^\mu \hat{s}_\mu) = \mathrm{sgn}(\eta - \xi)^2$ auf $T(Q_o^5) \leftrightarrow Q_o^5$ gilt, wie wir ursprünglich wünschten, muß man also $\mathscr{K}'\mathscr{K} > 0$ verlangen. Die Umgebung $\hat{U}(p)$ kann daher so angegeben werden

$$\hat{U}(p) = \{ q \in \hat{N}^5_{\mathscr{K}} :\ \mathscr{K}(q)\cdot\mathscr{K}(p) > 0 \}\,. \tag{85}$$

Im Einklang dazu, berechnet sich $\hat{V}_p(0)$ zu

$$\hat{V}_p(0) = \left\{ a^\mu(p)\partial_\mu \in (Q_o^5)_p : a_\varkappa(p)/\varkappa(p) > -1 \right\} . \qquad (86)$$

Dennoch ist zu bemerken, daß weder $\hat{V}_p(0)$ noch $\hat{U}(p)$ invariant unter der Wirkung der Gruppe O(2,4) definiert ist und daß die Abbildung $\hat{\chi}_p$ oder $\hat{\chi}_p^{-1}$ i.a. nicht mit den Elementen von O(2,4) kommutiert.

Die analoge lokale Korrespondenz für $T(M_c^4) \leftrightarrow M_c^4$ wird entsprechend gegeben durch

$$\hat{\pi}(\hat{s}, S^j(\hat{\pi}(p)))\partial/\partial x^j \rightarrow \hat{\pi}(\hat{\chi}_p(\hat{s})) = x'^j = \hat{s}^j(x) + (1-\hat{s}_\varkappa(x))x^j = x^j + S^j(x) \qquad (87)$$

Ein Ergebnis, das wir bei der Konstruktion der Abbildung $\hat{\chi}_p$ schon angenommen haben.

Zusammenfassend ist es uns also im Gegensatz zum globalen Fall gelungen, eine lokale Identifizierung zwischen den raum-, zeit- bzw. lichtartigen Tangentialraumelementen (bezüglich des Ursprunges) von $\hat{V}_p(0)$ und den entsprechenden Elementen (bezüglich p) von $\hat{U}(p)$ herzustellen. Das gleiche gilt für die Projektionen $\hat{\pi}_\varkappa(\hat{V}_p(0))$ und $\hat{\pi}(\hat{U}(p))$, da die Beziehung

$$(x'-x)^j(x'-x)_j = S^j(x)S_j(x)$$

gilt. Wir werden in 4.2.2. auf diese Punkte zurückkommen.

4. Die Frage der Kausalität in einer konform-invarianten Welt.

Die Frage der Kausalität in einer konform-symmetrischen Welt ist wegen ihrer offensichtlichen Wichtigkeit bei der Konstruktion einer konform-invarianten Quantenfeldtheorie Gegenstand heftiger Kontroversen [42]-[46] gewesen. In diesem Abschnitt wollen wir unsere Meinung dazu äußern.

4.1. Die Theoreme I und II.

Um die Frage über die konform-invariante Zeitordnung zu behandeln, benötigen wir die folgenden Theoreme. Für deren Beweis ist es zweckmäßig, einige Abkürzungen einzuführen:

Seien η_1^μ und η_2^μ die Koordinaten zweier Punkte aus $\mathbb{R}_o^6$. Dann setzen wir

$$[\mu,\nu] := \eta_1^\mu \eta_2^\nu - \eta_2^\mu \eta_1^\nu , \quad \mu,\nu \in \{0,1,..,5\}$$

$$z^k := [k\ ,\ 5] \quad , \quad k = 0,1,2,3.$$

Wir wollen nun das folgende Lemma beweisen.

Lemma (88)

Seien $\eta_i \in Q_o^5$, $k(\eta_1,\eta_2) \equiv \eta_1 \cdot \eta_2 = 0$. Wenn $[0,5] = [0,4]$ ist, dann gilt entweder $\eta_1 = r\,\eta_2$, $r \in \mathbb{R}_o$ oder $[4,5] = 0$.

Beweis:

Aus $\eta_1 \cdot \eta_2 = 0$ und $\eta_i \in Q_o^5$ erhält man

$$[0,5]^2 = \sum_{k=1}^{4} [k,0]^2 = \sum_{k=1}^{4} [k,5]^2 . \qquad (89)$$

Sei $[0,5] = 0$, d.h. (89) impliziert dann $[0,4] = [0,k] = [k,5] = 0$. Da $\eta_i \in Q_o^5$, so ist o.B.d.A. anzunehmen, daß $\eta_1^0 \neq 0$ ist. Daraus erhält man $\eta_2^0 \neq 0$ und $\eta_2 = \eta_2^0\,\eta_1/\eta_1^0$.

Nun sei $[0,5] \neq 0$. Wiederum können wir $\eta_1^0 \neq 0$ annehmen. Die Gl. (89) liefert uns $\eta_2^k = \eta_2^0\,\eta_1^k/\eta_1^0$, $k=1,2,3$ und $\eta_2^4 = ([0,5] + \eta_2^0\eta_1^4)/\eta_1^0$. Da $\eta_1 \cdot \eta_2 = 0$ ist, folgt $\eta_1^4 = \eta_1^5$ und daher $[4,5] = 0$. q.e.d.

Mit Hilfe dieses Lemmas beweisen wir das folgende

Theorem I

Sei $\eta_1 \cdot \eta_2 = 0$. Das $\operatorname{sgn}(\eta_1^0\eta_2^5 - \eta_2^0\eta_1^5) \equiv \varepsilon(05)$ ist invariant unter der Wirkung der Gruppe $O^\uparrow(2,4)$ genau dann, wenn $\eta_i \cdot \eta_i \geq 0$ für $i = 1,2$ gilt.

Beweis:
i) Sei $\eta_i \cdot \eta_i \geq 0$. Aus $\eta_1 \eta_2 = 0$ erhält man die Gl.(89) für $\eta_i \eta_i = 0$, $i = 1,2$ oder die Ungleichungen

$$[0,5]^2 > \sum_{k=1}^{4} [k,0]^2 , \quad [0,5]^2 > \sum_{k=1}^{4} [k,5]^2 , \tag{90}$$

falls eines von den beiden η_i die Ungleichung $\eta_i \eta_i > 0$ erfüllt, während das andere $\eta_j \eta_j \geq 0$, $j \neq i$, ist. Die Gln. (89) und (90) sind invariant unter $O(2,4)$, weil die Bilinearform $k(p,q)$ invariant unter $O(2,4)$ ist.
Wegen $z^k z_k \geq [5,4]^2 \geq 0$ gilt $\mathcal{E}(z^0) = \mathcal{E}((\Lambda z)^0)$ für $\Lambda \in L_6^{\uparrow}(\Lambda)$. Die Invarianz von $\mathcal{E}(05)$ unter $L_6^{\uparrow}(\Lambda)$ ist also klar. Ebenso ist die Invarianz von $\mathcal{E}(05)$ unter der Dilatationen leicht zu verifizieren. Im Falle der Translation T_a, $a=(a^0,..,a^3)$, definieren wir zunächst $T_a [0,5] = [0,5]'_k$ und erhalten dann

$$\begin{aligned} [0,5]'_0 &= (1+(a^0)^2/2)[0,5] + (a^0)^2[4,0]/2 + a^0[4,5] \\ [0,5]'_i &= (1+(a^i)^2/2)[0,5] + (a^i)^2[4,0]/2 + a^i[0,i], \quad i=1,2,3, \end{aligned} \tag{91}$$

sowie $$[0,5] - [0,4] = [0,5]' - [0,4]' . \tag{92}$$

Wenn $\eta_i \eta_i > 0$, $i = 1$ oder 2, ist, dann garantiert die Ungleichung (90) die Invarianz von $\mathcal{E}(05)$ unter der Translation $T_a \in O(2,4)$. Wenn $\eta_i \eta_i = 0$, $i = 1,2$, ist, dann hat man entweder $[0,5] = [0,4]$ oder $[0,5] \neq [0,4]$. Im ersten Fall liefert das Lemma (88) $\eta_1 = r\eta_2$ oder $[4,5] = 0$ und $\eta_2^k = \eta_1^k \eta_2^0 / \eta_1^0$, $k=1,2,3$. Falls $\eta_1 = r\eta_2$, dann ist die Invarianz von $\mathcal{E}(05)$ trivial, sonst folgt die Invarianz von $\mathcal{E}(05)$ nach Gl.(91). Im Falle $[0,5] \neq [0,4]$ liefert Gl.(89) $[0,5] = -[0,4]$ oder $|[0,5]| > |[0,4]|$. Die Invarianz der Gl.(89) unter $O(2,4)$ und die Relation (92) ergeben dann $[0,5]' = -[0,4]'$ oder $|[0,5]'| > |[0,4]'|$. Somit ist die Translationsinvarianz von $\mathcal{E}(05)$ bewiesen.
Da die Inversion R $\mathcal{E}(05)$ invariant läßt (vgl.Gln.(9) und (11)) und da die speziellen konformen Transformationen $SC_4(c)$ durch $RT(c)R$ erhalten werden können, ist die Invarianz von $\mathcal{E}(05)$ unter $SC_4(c)$ ersichtlich.
ii) Sei $\mathcal{E}(05)$ invariant unter $O^{\uparrow}(2,4)$ und nehmen wir an, daß $\eta_1 \eta_2 < 0$ ist. Dann können wir aber stets ein Element aus $O^{\uparrow}(2,4)$ finden, das die Koordinaten η_i auf η'_i transformiert mit $\eta'^0_1 = 0$, $\eta'^5_1 = 0$. Im Widerspruch zur vorausgesetzten Invarianz von $\mathcal{E}(05)$ unter $O^{\uparrow}(2,4)$. q.e.d.

In Anlehnung an das Theorem I können wir das folgende Theorem II formulieren:

Theorem II

Sei $\eta_i \cdot \eta_i \geq 0$, $\eta_i \in \mathbb{R}^6_o$. Dann gilt: $\mathcal{E}(05)$ ist invariant unter der Wirkung der $O^\uparrow(2,4)$ genau dann, wenn $\eta_1 \cdot \eta_2 = 0$ ist.

Beweis:

Nach dem Theorem I genügt es zu zeigen, daß $\eta_1 \eta_2 = 0$ eine notwendige Bedingung ist. Sei $\eta_1 \eta_2 \neq 0$, dann folgt $z^k z_k \neq [4,5]^2 \geq 0$, d.h. z^k könnte ein raumartiger Vektor sein, so daß $\mathcal{E}(05)$ i.a. nicht invariant unter der $L^\uparrow_6(\Lambda)$ wird, im Widerspruch zu unserer Annahme. Das folgende Beispiel zeigt die Existenz solcher Vektoren an:

$$\eta_1 = (0,\ \eta_1^1 \neq 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \eta_1^5 \neq 0), \qquad \eta_1 \cdot \eta_1 \geq 0,$$
$$\eta_2 = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \eta_2^4 \neq 0,\ \eta_2^5 \neq 0), \qquad \eta_2\, \eta_2 \geq 0.$$

Somit ist das Theorem vollständig bewiesen. q.e.d.

4.2. Die raum-, zeit- bzw. lichtartige Separation auf Q^5_o und M^4_c sowie auf den jeweiligen Tangentialräumen.

4.2.1. Q^5_o und $(Q^5_o)_q$.

Da die Gruppe O(2,4) die Bilinearform k(p,q) invariant läßt, ist das Signum von k(p,q) für p,q aus $\mathbb{R}^6$, invariant unter der Wirkung der Gruppe O(2,4). Die Einteilung der Punkte aus $Q^5_o \setminus \{p\}$ in raum-, zeit- bzw. lichtartigen Klassen bezüglich eines beliebigen aber festen Punktes $p \in Q^5_o$ ist daher O(2,4)-invariant.

Das gleiche gilt für die Elemente des Tangentialraumes $(Q^5_o)_q$, da für $X_q = a^\mu(q)\partial_\mu \in (Q^5_o)_q$ und alle $w \in O(2,4)$ gilt

$$g(X_q, X_q) = g^*(X_q, X_q) = g(w_* X_q, w_* X_q).$$

(Dabei haben wir die Karten-unabhängige Beschreibung für Tangentialvektoren benutzt, sonst müßten wir $X^{(\alpha)}_q$ und dementsprechend ∂_{q_α} etc. verwenden. Die beiden Beschreibungen sind aber äquivalent, wie man aus der Gl.(61) sehen kann.)

4.2.2. M^4_c und $(M^4_c)_q$.

Offensichtlich ist die Antwort auf die Frage, ob es eine $O(2,4)/Z_2(6)$-invariante Notation für raum-, zeit- und lichtartigen Separationen von Ereignissen in M^4_c bzw. Äquivalenzklassen

[a] in φ_o^5 gibt, im Hinblick auf die physikalische Bewertung der konformen Gruppe von großem Interesse.

Nach unseren Diskussionen im letzten Kapitel, insbesondere in den Abschnitten 3.3. und 3.4.4., geht hervor, daß die betreffenden raum-, zeit- und lichtartigen Notationen lokal invariant unter der Wirkung der Gruppe $O(2,4)/Z_2(6)$ sind. Die lokale Situation auf M_c^4 ist daher die gleiche wie die im Minkowskiraum mit der Poincaré-Gruppe als Symmetriegruppe.

Genauer meinen wir damit folgendes: Sei $\overset{\circ}{x} \in \mathbb{R}_1^4(\alpha)$ die lokalen Koordinaten eines Ereignisses $\overset{\circ}{E} \in M_c^4$ und $A^j(x)\partial_j$ ein Tangentialvektor an der Stelle $\overset{\circ}{x}$. Die in dem Minkowskiraum entwickelte Idee (vgl.3.4.1.), den Tangentialraum als den Raum zu verwenden, in dem die Messung durchgeführt wird, wird hier im M_c^4 in "erweiterer Form" übernommen. D.h., in unserer lokalen Betrachtung wollen wir die Tangentialvektoren $\hat{s}^\mu(\overset{\circ}{q})\partial_\mu \in \hat{V}_q(0)$ mittels der Abbildung $\hat{\pi}\circ\hat{\lambda}_{\overset{\circ}{q}}$ mit den Punkten x aus $\hat{\pi}(\hat{U}(\overset{\circ}{q}))$ in Beziehung setzen. Dabei berechnet sich $(\hat{s}^\mu)$ aus den vorgegebenen $A^j(x)=S^j(.)|_{\overset{\circ}{x}}$ und $\overset{\circ}{x}$ nach den Formeln (46), (47) wie folgt: Zunächst wählt man eine reelle Zahl t und setzt

$$\hat{s}(\overset{\circ}{x}) := t$$

sodann setzt man

$$\hat{s}^j(\overset{\circ}{x}) := A^j(\overset{\circ}{x}) + \overset{\circ}{x}^j \hat{s}(\overset{\circ}{x}). \tag{93}$$

Mit $\overset{\circ}{\eta}{}^j/\alpha \equiv \overset{\circ}{x}^j$ und $\overset{\circ}{q} = (\overset{\circ}{\eta}{}^j, \overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{\alpha} = \overset{\circ}{\eta}{}^j\overset{\circ}{\eta}{}_j)$ werden ferner

$$\hat{s}_\alpha(\overset{\circ}{q}) := \overset{\circ}{\alpha}\hat{s}_\alpha(\overset{\circ}{x}), \qquad \hat{s}^j(\overset{\circ}{q}) := \overset{\circ}{\alpha}\hat{s}^j(\overset{\circ}{x}) \tag{94}$$

sowie

$$\hat{s}_\alpha(\overset{\circ}{q}) := (2\overset{\circ}{\eta}{}^j \hat{s}_j(\overset{\circ}{q}) - \overset{\circ}{\alpha}\hat{s}_\alpha(\overset{\circ}{q}))/\overset{\circ}{\alpha}$$

definiert. Selbstverständlich ist die Setzung nicht eindeutig. Dies stört uns aber nicht, denn aus der Gl.(59) erhält man mit diesen durch die obigen Relationen aus $A^j(\overset{\circ}{x})$ und $\overset{\circ}{x}$ gewonnenen $\hat{s}^\mu\partial_\mu$ die Beziehung

$$(\pi_\alpha \circ \zeta_\alpha^{-1})^*_{\overset{\circ}{q}} \tilde{g}(\hat{s}^\mu\partial_\mu, \hat{s}^\mu\partial_\mu) = \tilde{g}_{\overset{\circ}{q}}(\hat{s}^\mu\partial_\mu, \hat{s}^\mu\partial_\mu).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gleich

$$A^j A_j \quad (= \tilde{g}(A^j\partial_j, A^j\partial_j)),$$

während die rechte Seite

$$\hat{s}^\mu \hat{s}_\mu / \alpha^2$$

liefert. Wir bekommen somit

$$\operatorname{sgn}(A^j A_j) = \operatorname{sgn}(\hat{s}^\mu \hat{s}_\mu), \tag{95}$$

und zwar unabhängig davon, wie $\hat{s}^\mu$ nach obigen Gln. (93), (94) aus $A^j(\hat{x})$ und $\hat{x}$ zusammengesetzt wurden. Das gleiche gilt für das durch $\hat{x}$ und $A^j(\hat{x})$ mittels Gl.(87) bestimmte x, eine Feststellung, die durch den angegebenen lokalen Homöomorphismus $\hat{\chi}_{\hat{q}}$ zustande kommt. Die oben erwähnte sog. "erweiterer Form" bedeutet also: anstatt direkt zwischen M^4_c und $(M^4_c)_x$ wollen wir die Untersuchung auf $Q^5_o \leftrightarrow \hat{T}(Q^5_o)$ verlagern. Nachdem wir als den ersten Schritt in dieser Richtung $A^j(\hat{x})$ durch $\hat{s}^\mu(\hat{q})\partial_\mu \in \hat{T}_{\hat{q}}(Q^5_o)$ ersetzt haben, wollen wir die Punkte $q \in \hat{U}(\hat{q})$ als die Bilder von $\hat{s}^\mu(\hat{q})\partial_\mu$ und $\hat{q} \in Q^5_o$ unter der Abbildung $\chi^{-1}_{\hat{q}}$ ansehen. Die Tangentialvektoren $\hat{s}^\mu(\hat{q})\partial_\mu$ und der Punkt $\hat{q}$ übernehmen somit die Rolle der unabhängigen Veränderlichen, genauso wie x und $a^j(x)\partial_j$ bei der Abbildung σ_x (s.Gl.(65)) im Minkowskiraum. Die erklärte Wirkungsweise von $O(2,4)/Z_2(6)$ im M^4 (vgl.2.3.1. und das Diagramm (24)) bedarf nun einer Modifizierung, weil die Tangentialvektoren in den dortigen Diskussionen nicht einbezogen worden sind. Wir ersetzen w in dem Diagramm (24) durch $\hat{\chi}_{w\hat{q}} \circ w_* \circ \hat{\chi}^{-1}_{\hat{q}}$ in unserem jetzigen lokalen Fall. Wenn man also vor der Transformation einen Punkt $x \in \hat{\pi}(\hat{U}(\hat{q}))$ hat, den man aus $\hat{s}^\mu(\hat{q})\partial_\mu$ und $\hat{q}$ mittels $\hat{\pi} \circ \hat{\chi}_{\hat{q}}$ (oder, äquivalent damit, aus $A^j(\hat{x})$ und $\hat{x}$ mittels Abbildung (87)) erhält, dann bekommt man nach der Transformation $w \in O(2,4)/Z_2(6)$ den Punkt $x' \in \hat{\pi}(\hat{U}(w\hat{q}))$:

$$\begin{aligned} x' &= \hat{\pi} \circ \hat{\chi}_{w\hat{q}} \circ w_* \circ \hat{\chi}^{-1}_{q} \circ \hat{\pi}^{-1}(x) \\ &= \hat{\pi} \circ \hat{\chi}_{w\hat{q}} \circ w_* (\hat{s}^\mu(\hat{q})\partial_\mu). \end{aligned} \tag{96}$$

Wir betonen, daß man sich bei der jetzigen auf $\hat{\pi}(Q^5_o)$ geltenden Betrachtung keinen Gedanken über die folgende Schwierigkeit zu machen braucht, die in Q^5_o passieren kann: die Möglichkeit nämlich, daß der Tangentialvektor $w_* \hat{\chi}^{-1}_{\hat{q}}(q)$ außerhalb des Definitionsbereiches von $\hat{\chi}_{w\hat{q}}$ liegt. Sie existiert tatsächlich, weil $\hat{U}(\hat{q})$ und $\hat{V}_{\hat{q}}(0)$ nicht in O(2,4)-invarianter Weise angegeben sind, worauf wir in 3.4.4. schon hingewiesen haben. Wenn der genannte Fall einträte, dann könnten wir keine der Gl.(84) entsprechende Gleichung für die transformierten Größen $s' = w_* s$, $\hat{q}' = w\hat{q}$ und $q' = \hat{\chi}_{w\hat{q}}(s')$ erhalten. Wir würden dann das folgende bekommen:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sgn}((\eta - \hat{\eta})^2) = \operatorname{sgn}((\eta - \hat{\eta})^2/\hat{x}\hat{x}) = \operatorname{sgn}(\hat{s}^\mu \hat{s}_\mu) = \\ &= \operatorname{sgn}(\hat{s}'^\mu \hat{s}'_\mu) = \operatorname{sgn}((\eta' - \hat{\eta}')^2/\hat{x}'\hat{x}') \neq \operatorname{sgn}((\eta' - \hat{\eta}')^2). \end{aligned} \tag{97}$$

Aus diesem Grund ist der lokale Homöomorphismus $\hat{\chi}_{\hat{q}}$ für die

$O(2,4)$-invariante lokale Klassifizierung der Punkte $q \in Q_o^5$ bezüglich $\overset{0}{q} \in Q_o^5$ nicht brauchbar. Aber angesichts der Feststellung in 4.2.1. ist die Anwendung von $\hat{\chi}_{\overset{0}{q}}$ für diesen Zweck in Q_o^5 von vornherein überflüssig.

Auf $\pi(Q_o^5)$ ist die Situation anders. Die Umgebungen $\hat{V}_{\overset{0}{q}}(0)$, $\hat{U}(\overset{0}{q})$ sowie ihre Transformierten sind für unsere lokale Untersuchung auf $\pi(Q_o^5)$ uninteressant, weil die mögliche Vorzeichenänderung des Produktes $\alpha' \overset{0}{\alpha}'$ (vgl.Gl.(85)) für die transformierten Größen angesichts der angegebenen Abbildung (82) und der Projektion $\pi: (\eta^\nu) \mapsto \eta^j/\alpha$ nicht mehr von Wichtigkeit ist. Uns interessiert bei der jetzigen lokalen Untersuchung nur die Gültigkeit der folgenden Gleichungskette

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}((x-\overset{0}{x})^2) = \operatorname{sgn}(A^j A_j) &= \operatorname{sgn}(\hat{s}^\mu \hat{s}_\mu) = \operatorname{sgn}(\hat{s}'^\mu \hat{s}'_\mu) = \\ &= \operatorname{sgn}(A'^j A'_j) = \operatorname{sgn}((x'-\overset{0}{x}')^2) \end{aligned} \qquad (98)$$

Um dies zu erreichen, ist vor allem die Gültigkeit der Gl.(87) für die transformierten Größen zu sichern, also die Gültigkeit der Gleichung in der 2.Zeile von Gl.(98). Man muß also darauf achten, daß keine der Größen

$$\overset{0}{\beta}' = \beta(w\overset{0}{q}) \quad \text{und} \quad \beta' = \overset{0}{\beta}' + \hat{s}'_\beta(w\overset{0}{q}), \ \beta \in Z, \qquad (99)$$

wobei $\hat{s}'^\mu(wq) = w^\mu{}_\nu(\hat{s}^\nu(w^{-1}(w\overset{0}{q}))$

ist, verschwindet. Dies kann man aber stets durch eine geeignete Wahl der Karte $\hat{N}_\beta^5$ erreichen. M.a.W., bei der letzten Zeile der Gl.(96) hat man für $\hat{\pi}$ diejenige geeignete Abbildung $\psi_\beta \circ \pi_\beta$ zu wählen, die die Größen in Gl.(99) nicht zum Verschwinden bringt. Notfalls muß man den Parameter t in der Gl.(93) so ändern, daß dieser Fall eintritt.

Global ist die Situation wiederum anders: Durch eine spezielle konforme Transformation wird z.B. die Größe $(x.x)$ in $(x.x)/\sigma(x;c)$ abgebildet. Je nach der Wahl der Parameter (c^j) ist der "Skalenfaktor" $\sigma(x;c)$ positiv oder negativ. M.a.W., die Notation von raum-, zeit- oder lichtartiger Separation ist nicht einzelnen invariant unter der Wirkung der konformen Gruppe. Wir können im globalen Fall nur über licht- bzw. nichtlichtartige Separation zweier Ereignisse in konform-invarianter Weise sprechen.

4.3. Die Zeitordnung auf Q_o^5 und $\mathbb{R}_c^4$ und auf ihren jeweiligen Tangentialräume.

4.3.1. Die Zeitordnung auf $T_q(Q_o^5)$ und Q_o^5.

Im Rahmen der Poincaré-Gruppe wußten wir, daß man eine unter der orthochronen Poincaré-Gruppe invariante Zeitordnung für relativ zueinander zeitartig oder lichtartig gelegene Ereignisse (Punkte) einführen kann[47]. Dabei ist die Zeitordnung für die zueinander zeitartigen Ereignisse transitiv, d.h. wenn E_2 später als E_1 (schreibe: $E_2 \succ E_1$) und $E_3 \succ E_2$ sind, und wenn E_2 bzw. E_3 zeitartig bezüglich E_1 bzw. E_2 ist, dann ist $E_3 \succ E_1$ und E_3 zeitartig bezüglich E_1. Für die lichtartigen Punkte ist die Situation etwas anders: wenn $E_2 \succ E_1$, $E_3 \succ E_2$ und E_2 bzw. E_3 lichtartig bez. E_1 bzw. E_2 ist, so wird zwar $E_3 \succ E_1$ aber E_3 ist i.a. nichtlichtartig bezüglich E_1, sondern zeitartig.

Auf dem Tangentialraum $(Q_o^5)_q$ von $q \in Q_o^5$ wollen wir die folgende Funktion

$$\varepsilon(a(c)) := \operatorname{sgn}(\eta^0 a^5(c) - \eta^5 a^0(c)), \quad c = (\eta^\mu), \qquad (100)$$

als Zeitordnung benutzen. Diese Funktion ist nach dem Theorem I von 4.1. invariant unter der Wirkung der Gruppe $O^\uparrow(2,4)$ für zeitartige und lichtartige Tangentialvektoren und zwar bezüglich des Ursprunges von $(Q_o^5)_q$. Sie stellt eine Verallgemeinerung der entsprechenden Funktion im Minkowskiraum dar, weil auf $T(\mathbb{R}_1^4(\mathscr{H}))$ gilt

$$\varepsilon(a(q)) = \operatorname{sgn}(A^0(\hat{\pi}(q))), \quad A^j A_j \geq 0,$$

wobei $$A^j(\hat{\pi}(q)) = \left(\hat{\pi}_*(a^\mu \partial_\mu)\big|_{\hat{\pi}(q)}\right)^j$$

ist. Was man unter der Zeitordnung mittels der obigen Funktion (100) im Tangentialraum $(Q_o^5)_q$ versteht, ist folgendes:

Zunächst bemerken wir, daß die Summe zweier zeitartigen Tangentialvektoren $a^\mu(q)\partial_\mu$, $b^\mu(q)\partial_\mu$ mit $\varepsilon(a(q)) > 0$ und $\varepsilon(b(q)) > 0$ wieder einen zeitartigen Tangentialvektor mit $\varepsilon((a+b)(q)) > 0$ ergibt. Der Tangentialraum $(Q_o^5)_q$ wird nun als ein affiner Raum angesehen, wobei der Punkt P_o im Ursprung vom $(Q_o^5)_q$ liegen möge. Der Vektor $a^\mu \partial_\mu$ definiert dann einen Punkt P_1, so daß $\overrightarrow{P_o P_1} = a^\mu(q)\partial_\mu$ und a^μ die Koordinaten des Punktes P_1 bezüglich P_o angibt. In der gleichen Weise bestimmt der Vektor $(a^\mu + b^\mu)\partial_\mu$ einen Punkt P_2 mit Koordinaten $(a^\mu + b^\mu)$. Die Zeitordnung zwischen P_1 und P_2 ist

dann definiert durch $\varepsilon(b(q))$. Da dann mit $\varepsilon(a(q))>0$ und $\varepsilon(b(q))>0$ nunmehr $\varepsilon(a(q)+b(q))>0$ folgt, haben wir somit die Transitivität der Zeitordnung für die zeitartig zueinander stehenden Punkte im Tangentialraum auf vernünftige Weise erklärt. Diese Eigenschaft ist nach dem Theorem I invariant unter der Wirkung der Gruppe $O^{\uparrow}(2,4)$.

Im Falle der relativ zueinander lichtartigen Punkte ist die Situation völlig analog zu der im Rahmen der Poincaré-Gruppe betrachteten.

Um nun auf Q_o^5 die Zeitordnung anzugeben, wollen wir bei der lokalen Betrachtung die Umgebungen $\hat{U}(q)$, $\hat{V}_q(0)$ und die Abbildung $\hat{\chi}_q$ von 3.4.4. heranziehen. Wenn $a^{\mu}(q)\partial_{\mu}$, $b^{\mu}(q)\partial_{\mu}$ und $(a^{\mu}(q)+b^{\mu}(q))\partial_{\mu}$ alle im $\hat{V}_q(0)$ liegen, so können wir mittels des Homöomorphismus $\hat{\chi}_q$ eine Zeitordnung auf $\hat{\chi}_q(\hat{V}_q(0))=\hat{U}(q)$ einführen. Diese Zeitordnung ist invariant unter der Gruppe $O^{\uparrow}(2,4)$ im folgenden Sinne: Sei $w \in O^{\uparrow}(2,4)$ und sei q zeit- bzw. lichtartig bezüglich $\bar{q}$. Dann ist die Zeitordnung zwischen q und $\bar{q}$ invariant unter der Abbildung $\hat{\chi}_{w\bar{q}} \circ w \circ \hat{\chi}_q^{-1}$. Da aber nach unserer Bemerkung in 4.2.2. die Zeitartigkeit der Punkte q und $\bar{q}$ aus Q_o^5 nicht invariant unter der gleichen Abbildung ist, ist die Invarianz der Zeitordnung (bezüglich dieser Abbildung) nicht von großem Nutzen, wenn man diese Zeitordnung in einer lokalen physikalischen Theorie verwenden will, die Q_o^5 als die zugrundeliegende geometrische Struktur hat und den Homöomorphismus $\hat{\chi}_{\bar{q}}$ benutzt. Dieses Problem taucht bei der (nach unserer Meinung) physikalisch wichtigeren und interessanteren lokalen Zeitordnung auf M_c^4 nicht auf, wie wir im 4.2.2. zum Teil gesehen haben und unten im 4.3.2. noch sehen werden.

Die globale Situation auf Q_o^5 ist folgende: Nach dem Theorem II von 4.1.- wissen wir, daß der Ausdruck $\varepsilon(05) \equiv \varepsilon(q_1,q_2)$ nur für $k(q_1,q_2)=0$ invariant unter der Wirkung der Gruppe $O^{\uparrow}(2,4)$ ist. Man kann daher global auf Q_o^5 nur für lichtartig zueinander liegenden Punkte eine $O^{\uparrow}(2,4)$-invariante Zeitordnung mittels $\varepsilon(05)$ von Gl.(4) angeben.

4.3.2. Die Zeitordnung auf M_c^4 und $(M_c^4)_x$.

Nach den Diskussionen in den letzten Abschnitten kann eine unter der Wirkung der Gruppe $O^{\uparrow}(2,4)/Z_2(6)$-invariante Zeitordnung

im M_c^4, wenn sie existiert, lokal nur für relativ zueinander zeit- oder lichtartig liegende Punkte und global nur für relativ zueinander lichtartige Punkte einen Sinn haben. Die Diskussionen über die Eigenschaften der Homöomorphismen χ und $\hat{\chi}$ sowie die der Projektion $\hat{\pi}$ etc. legen es nahe, die Funktion $\mathcal{E}(a,c))$ als Zeitordnung im M_c^4 zu verwenden, falls es uns gelingt, ihr einen eindeutigen Wert für sämtliche Elemente der Äquivalenzklasse $[q]$ (m.a.W. für die ganze Bahn von q unter der Wirkung der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}_o$) zuzuordnen.

Wir haben nun im Abschnitt 3 gesehen, wie man die Umgebung $\hat{U}(q)$ und den Raum $\hat{L}(q)$ mittels eines A-invarianten Vektorfeldes parametrisiert, dessen Komponenten $\hat{s}^\mu(q)$ die Eigenschaft $\hat{s}^\mu(rq) = r\,\hat{s}^\mu(q)$, $r \in \mathbb{R}_o$, besitzen. Hieraus folgt, daß die Funktion $\mathcal{E}(\hat{s}(q))$ auf der ganzen Bahn $\{r\cdot q,\ r \in \mathbb{R}_o\}$ von q nur einen Wert, nämlich

$$\mathcal{E}(\hat{s}(c)) = \operatorname{sgn}((\hat{\pi}(q))^o \hat{s}^5(\hat{\pi}(q)) - (\hat{\pi}(q))^5 \hat{s}^o(\hat{\pi}(q))) \equiv \mathcal{E}((\hat{\pi}_* \hat{s})(\hat{\pi}(q)) \qquad (101)$$

hat.

Für den lokalen Fall wird $\hat{s}$ wie in 4.2.2. diskutiert aus $A(\overset{o}{x})$ und $\overset{o}{x}$ etc. konstruiert (vgl.Gln.(93),(94)), das man dann in die Funktion $\mathcal{E}(\hat{s}(q))$ einsetzt. Wegen des Theorems I und der Homogenität von $\hat{s}^\mu$ ist $\mathcal{E}(\hat{s}(q))$ $O^\uparrow(2,4)/Z_6(6)$-invariant. Sie stellt somit die gewünschte Zeitordnung für zeit- oder lichtartig zu o gelegenen Punkte aus $\hat{\pi}(\hat{U}(q))$ dar. Dabei versteht man unter Zeit-oder Lichtartigkeit genau das, wie wir es in 4.2.2. definiert haben. Wir bemerken ferner, daß die Zeitordnung $\mathcal{E}(\hat{s}(q))$ vom Parameter t in der Gl.(93) unabhängig ist. Die aus den vorgegebenen $A^j(\overset{o}{x})$ und $\overset{o}{x}$ nach den Gln. (93) und (94) gebildeten, überabzählbar vielen $\hat{s}^\mu$ liefern uns somit eine eindeutige Zeitordnung. (Für $\alpha = \mathcal{X}$ z.B. erhalten wir aus $\hat{s}_{\mathcal{X}}(x)=t$ und Gln.(93) und (94) die Gleichung

$$\eta^o \hat{s}^5(q) - \eta^5 \hat{s}^o(q) = \frac{1}{\mathcal{X}^2}(x^j x^o A_j(x) - A^o(x)\frac{x\cdot x-1}{2}) + t(\eta^o\eta^5 - \eta^5 \mathcal{X} x^o)$$

mit $x \cong \hat{\pi}(o)$, woraus die Unabhängigkeit von $\mathcal{E}(\hat{s}(q))$ bezüglich des Parameters t ersichtlich ist.)

Für den globalen Fall muß man anders vorgehen, weil wir es hier mit den Gln. (71), (78) anstatt mit Gln.(82), (87) zu tun haben. Die lichtartigen Punkte x und $\overset{o}{x}$ aus M_c^4 werden nunmehr als primäre Größen(Veränderlichen) betrachtet, während $\hat{s}^\mu$ als Funktion von ihnen zu bekommen sind. Die Zeitordnung zwischen x und $\overset{o}{x}$ wird

dann mit diesen $\hat{s}^\mu$ mittels der Funktion $\mathcal{E}(\hat{s}(q))$ bestimmt. Im einzelnen verläuft die Prozedur wie folgt:

Seien $[\overset{\circ}{q}]$ von $\overset{\circ}{x}_\alpha = \Psi_\alpha([\overset{\circ}{q}])$ und $[q]$ von $x_\beta = \Psi_\beta([q=\overset{\circ}{q}+\hat{s}])$ in den Karten $\hat{\Omega}_\alpha$ bzw. $\hat{\Omega}_\beta$ von $\hat{\Omega} \cong K_c^4$. Sei ferner $\{\hat{s}\}$ die Menge der hierfür verwendeten Parameter zur Beschreibung der zu $\overset{\circ}{q} \leftrightarrow \overset{\circ}{x}_\alpha$ lichtartig liegenden Punkte $q \leftrightarrow x_\beta$. Jedes Element $\hat{s}$ von $\{\hat{s}\}$ hat dann die folgenden Bedingungen

$$\text{(a) } \hat{s}^\mu(\overset{\circ}{q})\hat{s}_\mu(\overset{\circ}{q})=0 \ , \ \text{(b) } k(\hat{s}(\overset{\circ}{q}),\overset{\circ}{q})=0, \qquad (102)$$

$$\text{(c) } \mathcal{E}(\hat{s}_1(\overset{\circ}{q})) = \mathcal{E}(\hat{s}_2(\overset{\circ}{q})) \text{ für alle } \hat{s}_i \in \{\hat{s}\},$$

$$\text{(d)} \begin{cases} x_\beta^j = \dfrac{\overset{\circ}{\eta}{}^j + \hat{s}^j(\overset{\circ}{q})}{\overset{\circ}{\beta} + \hat{s}_\beta(\overset{\circ}{q})} & j=0,1,2,3 \text{ für } \beta = \alpha \text{ oder } \lambda \\ x_{\tilde{\beta}}^j = \dfrac{\overset{\circ}{\eta}{}^{(5-j)} + \hat{s}^{(5-j)}(\overset{\circ}{q})}{\overset{\circ}{\beta} + \hat{s}_\beta(\overset{\circ}{q})} & j=0,1 \text{ und } x_{\tilde{\beta}}^j = \dfrac{\overset{\circ}{\eta}{}^j + \hat{s}^j(\overset{\circ}{q})}{\overset{\circ}{\beta} + \hat{s}_\beta(\overset{\circ}{q})} \quad j=2,3 \\ & \text{für } \beta = \tilde{\alpha} \text{ oder } \tilde{\lambda} \end{cases}$$

zu erfüllen, falls $\alpha = \beta$ ist; sonst hat $\hat{s}$ noch eine weitere Bedingung

$$\text{(e)} \qquad \hat{s}_\alpha(\overset{\circ}{q}) + \overset{\circ}{\alpha} = 0$$

zu erfüllen.

Nach der Voraussetzung liegen $\overset{\circ}{x}_\alpha$ und x_β lichtartig zueinander. Mit der in 3.4.3. erklärten "Lichtartigkeit" gilt somit

$$k((r_1\overset{\circ}{q} - r_2 q),(r_1\overset{\circ}{q} - r_2 q)) = 0 \qquad (103.1)$$

$$\text{für } r_1\overset{\circ}{q} \in [\overset{\circ}{q}] \sim \overset{\circ}{x} \ , \ r_2 q \in [q] \sim x_\beta, \ r_1, r_2 \in \mathbb{R}_0, \ q, \overset{\circ}{q} \in \mathcal{C}_0^5.$$

Sie ist äquivalent zu

$$0 = 2r_1\overset{\circ}{q} \cdot r_2 q = 2r_1\overset{\circ}{\eta}{}^k r_2\eta_k - r_1\overline{\beta}(\overset{\circ}{q})r_2\beta(q) - r_1\beta(\overset{\circ}{q})r_2\overline{\beta}(q) \qquad (103.2)$$

oder

$$\overset{\circ}{\beta}(x_\beta^j x_{\beta j}) - 2(x_\beta^j \cdot \overset{\circ}{\eta}_{\alpha j}) + \overset{\circ}{\overline{\beta}} = 0 \qquad (103.3)$$

Dabei hat man unter $x_\beta^j \cdot \overset{\circ}{\eta}_{\alpha j}$ das folgende zu verstehen (vgl. mit dem Ausdruck $\overset{\circ}{\eta}{}^k \eta_k$ in der Gl.(103.2))

$$x_\beta^j \cdot \overset{\circ}{\eta}_{\alpha j} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{3} g_{jj} \, x_\beta^j \cdot \overset{\circ}{\eta}{}_\alpha^j & \text{für } \beta = \alpha \text{ oder } \lambda \ , \ \alpha \in Z \\ x_\beta^0 \overset{\circ}{\eta}{}_\alpha^5 - x_\beta^1 \overset{\circ}{\eta}{}_\alpha^4 - x_\beta^2 \overset{\circ}{\eta}{}_\alpha^2 - x_\beta^3 \overset{\circ}{\eta}{}_\alpha^3 & \text{für } \beta = \tilde{\alpha} \text{ oder } \tilde{\lambda} \ , \ \alpha \in Z. \end{cases}$$

Die Gl.(103.3) ist eine Verallgemeinerung der üblichen Lichtartigkeitsbedingung zwischen den Punkten x und $\overset{\circ}{x}$ im Minkowskiraum, i.e. $(x-\overset{\circ}{x})^j(x-\overset{\circ}{x})_j=0$, die man durch Einsetzung von $\overset{\circ}{\beta} = \overset{\circ}{\alpha}$ in die Gl.(103.3) erhalten kann.

Ferner bekommt man aus der Gl.(102/d) unter Benutzung der (notwendigerweise von $\hat{s}$ zu erfüllenden) Bedingungen (102/a,b)

$$x_{\beta}^{j}\, x_{\beta j} = \frac{\overset{\circ}{\beta} + \hat{s}_{\beta}(\overset{\circ}{q})}{\overset{\circ}{\beta} + \hat{s}_{j}(\overset{\circ}{q})} \,. \tag{104}$$

Für $\beta = \bar{\alpha}$ und $x_{\bar{\alpha}} \in \hat{\Omega}_{\bar{\alpha}} \setminus \hat{\Omega}_{\alpha}$ liefert sie als Spezialfall die Relation

$$x_{\bar{\alpha}}^{j}\, x_{\bar{\alpha} j} = 0. \tag{105}$$

Die Gln.(103.3) und (105) ergeben dann zusammen

$$x_{\bar{\alpha}}^{j}\, \overset{\circ}{x}_{\alpha j} = 1/2. \tag{106}$$

Sei nun o.B. $\alpha = \varkappa$, die Bedingung (102/e) liefert dann für $\beta = \tilde{\varkappa}$ oder $\tilde{\lambda}$ aus der Gl.(102/d) die folgende Beziehung für die Komponenten x_{β}^{0} und x_{β}^{1} von x_{β}:

$$x_{\beta}^{0} = x_{\beta}^{1} \tag{107}$$

Alle diese in x_{β} und $\overset{\circ}{x}_{\alpha}$ eingesteckten Informationen (i.e. Gln. (102/e), (103.3)-(107)) können im Einklang mit dem eingangs Erwähnten (i.e. x_{β} und $\overset{\circ}{x}_{\alpha}$ sind als primäre Größe zu betrachten) als bekannt angesehen werden. Sie sind für eine konsistente Parametrisierung von $\hat{s}^{\mu}$ unentbehrlich, die wir wie folgt angeben können: Man setze zuerst

$$\hat{s}_{0}(\overset{\circ}{x}_{\alpha}) = (t-1)\overset{\circ}{\beta}/\overset{\circ}{\alpha} \quad , \; t \in \mathbb{R}_{0}, \tag{108}$$

$$\hat{s}^{j}(\overset{\circ}{x}_{\alpha}) = (t x^{j'}_{\beta}.\overset{\circ}{\beta} - \overset{\circ}{\eta}^{j})/\overset{\circ}{\alpha}$$

$$\text{mit } j' = \begin{cases} 0,1,2,3 \\ 0,1,2,3 \end{cases} \quad j = \begin{cases} 0,1,2,3 \\ 5,4,2,3 \end{cases} \quad \text{für } \beta = \begin{cases} \varkappa \text{ oder } \lambda \\ \tilde{\varkappa} \text{ oder } \tilde{\lambda} \end{cases},$$

sodann werden $\hat{s}^{\mu}(\overset{\circ}{q}) := \alpha\, \hat{s}^{\mu}(\overset{\circ}{x}_{\alpha})$

und $\hat{s}_{\overline{\beta}}(\overset{\circ}{q}) := (2\hat{s}^{j}(\overset{\circ}{q})\, \overset{\circ}{\eta}_{j} - \overset{\circ}{\beta}\, \hat{s}_{\beta}(\overset{\circ}{q}))/\overset{\circ}{\beta}$ (109)

gesetzt. Diese Setzungen erfüllen die Bedingungen (102/a,b,d,e) in konsistenter Weise, wobei man die Gln. (103.3), (104) oder Gln.(105), (106) bei der Verifizierung zu verwenden hat. Z.B. seien x_{β} und $\overset{\circ}{x}_{\alpha}$ in zwei verschiedenen Karten mit $\beta = \bar{\alpha}$. Dann ist $\hat{s}_{\bar{\alpha}}(q)$ nach den Bedingungen (102/e) und (102/b) (oder (102/a)) aus $\{\hat{s}^{j}(\overset{\circ}{q}),\ j=0,1,2,3\}$ (die man nach den Setzungen (108) und(109) aus den vorgegebenen $x_{\bar{\alpha}}$ und $\overset{\circ}{x}_{\alpha}$ gewonnen hat) zu erhalten. Hätten wir keine Gln.(105) und (106) zur Verfügung gehabt, dann wäre unsere Setzung (Gl.(108)) inkonsistent. Die Bedingung (102/c) schließlich schränkt den Wertebereich des Parameters t auf $\mathbb{R}_{+}$ ein,

denn es gilt für $\hat{s}$ mit $t=1$ und $\hat{s}'$ mit $t'\neq 1$ die folgende Relation

$$\mathcal{E}(\hat{s}'(\xi)) = \mathcal{E}(t')\cdot\mathcal{E}(\hat{s}(\xi)).$$

Da für $[\sigma] \in \hat{\Omega}_\alpha \cap \hat{\Omega}_\beta$ der Punkt $x=\psi_\alpha([\sigma])$ einmal als der Punkt x_α aus $\mathbb{I}^4_1(\alpha)$ und zum anderen als der Punkt x_β aus $\mathbb{I}^4_1(\beta)$ betrachtet werden kann, stellt somit die Teilmenge $\{\hat{s}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ (nach unserer letzten Feststellung) nicht nur für den Punkt x_α sondern auch für den Punkt x_β die gesuchte Parametrisierung dar. M.a.W., wir können uns in der jetzigen globalen Betrachtung bei der Parametrisierung von $\hat{s}$ nach t auf $t \in \mathbb{R}_+$ beschränken.

4.4. Einige Bemerkungen.

i) In unserer Arbeit spielen die Tangentialräume und insbesondere dasjenige global A-invariante Vektorfeld $\hat{s}$ eine sehr wichtige Rolle. Die Existenz eines überall nicht verschwindenden global A-invarianten Vektorfeldes auf Q^5_o ist nicht trivial, denn bekanntlich besitzen nur S^1, S^3 und S^7 unter den Sphären S^n diese Eigenschaft. Zum Glück haben wir hier gerade mit S^1 und S^3 zu tun. Hätten wir eine andere Theorie mit 2 räumlichen Dimensionen vor uns, dann würden wir nach der entsprechenden Homogenisierung der Koordinaten etc. S^2 erhalten. Da aber S^2 nicht parallelisierbar ist, könnte es die für unsere Diskussion maßgebenden globalen Vektorfelder nicht mehr geben. Die Arbeit müßte dann zumindest einen anderen Verlauf nehmen.

ii) Der 1-Teilchenzustand in einem konform-invarianten System hat, wie wir eingangs gesagt haben, entweder eine verschwindende oder kontinuierliche Ruhemasse. Der letztere Fall erscheint uns aber nach unserem bisherigen Wissenstand nur akademisch zu sein, während im Falle der Teilchen mit verschwindender Ruhemasse zwei Ereignisse die lichtartig zueinander liegen, nur durch Propagation der freien Teilchen sich gegenseitig kausal beeinflußen können. Für diese spezielle Situation sind die Eigenschaften des 1-Teilchenzustandes mit der geometrischen kausalen Struktur vereinbar. Dabei muß man sich allerdings vergewissern, daß es keine weitere Wechselwirkung längs des Weges z.B. eines Lichtstrahles gibt, der die zwei Ereignisse verbindet, sonst könnte die Wechselwirkung eine Richtungsänderung verursachen, wodurch sich zeitartige Ereignisse gegenseitig kausal beeinflußen könnten.

5. Der Operator auf M_c^4, der dem masselosen Klein-Gordon-Operator im Minkowskiraum entspricht.

5.1. Die Gründe der Untersuchung.

Wir wollen in diesem Abschnitt das Problem behandeln, ob $\partial/\partial\eta^\mu\,\partial/\partial\eta_\mu$ wirklich einen Differentialoperator auf Q_o^5 oder M_c^4 ist. Man hat vor allem zu prüfen, ob $\partial/\partial\eta^\mu$ ein Differentialoperator auf Q_o^5 oder M_c^4 darstellt. Die Argumentation mit der Einschränkung des Definitionsbereiches auf $C^\infty(Q_o^5)$ oder $C^\infty(M_c^4)$, um aus einem Operator im $\mathbb{R}_o^6$ einen Operator im Q_o^5 oder M_c^4 zu machen, gilt nur in einem geeigneten Koordinatensystem, wie man aus dem folgenden Beispiel ersehen kann:

Wir geben den Laplace-Beltrami-Operator (L.B.O.) im $\mathbb{R}^3$ in einem kartesischen System und in einem System der Kugelkoordinaten an. (Dieser Operator ist im $\mathbb{R}^3$ besser bekannt als der Laplace-Operator. Als Differentialoperator einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit ist er von großem Interesse, da er manche Invarianzeigenschaften besitzt. Vgl. Ref. [17], S.386.)

$$\Delta_{\mathbb{R}^3} f(x^1,x^2,x^3) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i} f(x^1,x^2,x^3)$$

und

$$\Delta_{\mathbb{R}^3} f(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\Big\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}f(r,\vartheta,\varphi)) + \frac{1}{(\sin\vartheta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}f(r,\vartheta,\varphi) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf(r,\vartheta,\varphi))\Big\}$$

Der gleiche L.B.O. auf der 2-Sphäre mit dem Radius r, $S^2(r)$, berechnet sich in den jeweiligen Koordinatensystemen zu

$$\Delta_{S^2(r)}\tilde{f}(x^1,x^2) = \Big\{r^2\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2} - \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{2}\partial_i(x^i)^2\partial_i - \frac{2x^1x^2}{r}\partial_1\partial_2\Big\}f(x^1,x^2)$$

und

$$\Delta_{S^2(r)}\tilde{f}(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\Big(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\tilde{f}(\vartheta,\varphi) + \frac{1}{(\sin\vartheta)^2}\frac{\partial^2}{\partial^2\varphi}\tilde{f}(\vartheta,\varphi)\Big),$$

wobei im ersten Fall x^1 und x^2 die unabhängigen Variabeln sind und $x^3 = \pm(r^2-(x^1)^2-(x^2)^2)^{1/2}$ ist. Das Vorzeichen von x^3 hängt von den Karten ab, die $S^2(r)$ überdecken.

In unserem Fall stellt der Operator $\frac{\partial}{\partial\eta^\mu}\frac{\partial}{\partial\eta_\mu}$ den L.B.O. im $\mathbb{R}_2^6$ dar. Dies kann man nach der entsprechenden Definition unter Benutzung der Metrik g von Gl.(54) verifizieren. Da wir aber wissen (vgl.3.3.), daß die induzierte Metrik $\hat{g}$ von g auf dem total-isotropen Raum Q_o^5 singulär ist, kann man daher nach der

Definition keinen L.B.O. auf Q_o^5 angeben, wie es auf der Sphäre $S^n(r)$ ohne weiteres möglich ist. Aus diesem Grund können wir daher nur umgekehrt vorgehen. D.h., wir wollen feststellen, welcher Operator auf $\mathcal{M}_c^4$ den masselosen Klein-Gordon-Operator auf M^4 (der den Laplace-Beltrami-Operator im M^4 darstellt) entspricht.

5.2. Die Analyse.

Wir geben die Definitionen von C^k-Funktionen und C^k-Differentialoperator auf einer Mannigfaltigkeit an [48].

Definition (110)
Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Eine auf M definierte Funktion f ist ein Element von $C^k(M)$, wenn für jedes Koordinatensystem $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ die Funktion $f_\alpha := f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ in $C^k(\tilde{U}_\alpha)$ ist. $(\tilde{U}_\alpha \equiv \varphi_\alpha(U_\alpha))$.

Eine andere äquivalente Beschreibung für $C^k(M)$ kann man aus dem folgenden Lemma ersehen:

Lemma (111)
Es gibt genau eine Funktion f auf der Mannigfaltigkeit M mit $f_\alpha = f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ für beliebige Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, falls für je zwei der Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ und $(U_\alpha', \varphi_\alpha')$

$$f_{\alpha'} = f_\alpha \circ (\varphi_\alpha \varphi_{\alpha'}^{-1}) \text{ in } \varphi_{\alpha'}(U_\alpha \cap U_{\alpha'})$$

gilt. Die so eindeutig auf M definierte Funktion f ist aus $C^k(M)$ genau dann, wenn $f_\alpha \in C^k(\tilde{U}_\alpha)$ für alle α ist.

Definition (112)
i) Ein Differentialoperator P mit C^k-Koeffizienten auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist eine lineare Abbildung

$$f \in C^\infty(U) \mapsto Pf = \sum_\alpha a^\alpha D^\alpha f \in C^k(U),$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ n-Tupel von Indizes $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $a^\alpha \in C^k(U)$ mit $\mathrm{Tr.}(a^\alpha)$ lokal endlich in U für alle α und $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$ sind.

ii) Ein Differentialoperator mit C^k-Koeffizienten auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine lineare Abbildung

$$P: C^\infty(M) \to C^k(M),$$

so daß es für jedes lokale Koordinatensystem der Karte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ein Differentialoperator P^α mit C^k-Koeffizienten auf $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ derart gibt, daß

$$(Pf) \circ \varphi_\alpha^{-1} = P^\alpha (f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \text{ in } \tilde{U}_\alpha$$

gilt, wobei $f \in C^\infty(M)$ ist.

Nach diesen Definitionen stellt ein Vektorfeld auf M einen Differentialoperator dar. Wir werden diese Feststellung in unserer folgenden Untersuchung benutzen. Anolog zu Lemma (111) kann man für den Differentialoperator P auf der Mannigfaltigkeit M folgendes Lemma aussprechen:

<u>Lemma</u> (113)

Es gibt genau einen Differentialoperator P auf der Mannigfaltigkeit M mit

$$(Pf)\circ\varphi_\alpha^{-1} = P^\alpha(f\circ f_\alpha^{-1}) \quad [\text{illegible}] \quad \varphi_\alpha(U_\alpha), \quad f \in C^\infty(M),$$

für alle Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (wobei P^α der Differentialoperator auf der Karte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ist), wenn für je zwei der Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ und $(U_{\alpha'}, \varphi_{\alpha'})$ gilt

$$P^\alpha(f_\alpha)\circ\varphi_\alpha\varphi_{\alpha'}^{-1} = P^{\alpha'}(f_\alpha\circ\varphi_\alpha\varphi_{\alpha'}^{-1}), \quad f_\alpha \in C_0^\infty(\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_{\alpha'})).$$

5.2.1. Die Fortsetzbarkeitsbedingungen für $f_\varkappa \in C^\infty(E_1^4, \varkappa)$ auf ganz M_c^4.

Wir wollen mit Hilfe des Lemmas (113) unsere Untersuchung durchführen. D.h., wir wollen von einem Klein-Gordon-Operator im Minkowskiraum M^4 ausgehen und den Operator im M_c^4 berechnen. Dafür ist vor allem die Existenz der Funktionen, die auf ganz M_c^4 definiert sind, zu sichern. Indem wir nun von einer Funktion aus $C^\infty(M^4)$ ausgehen, wollen wir die Bedingung für die Fortsetzbarkeit dieser Funktionen auf ganz M_c^4 diskutieren. Die Fortsetzung, falls sie existiert, ist dann nach dem Lemma (111) eindeutig. Die Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt aber auch schon aus ihrer Existenz in unseren Fall, da wir wissen, daß jede Karte $(\hat\Omega_\alpha, \psi_\alpha)$, $\alpha \in Z$, in $\hat\Omega \equiv M_c^4$ dicht liegt.(Vgl.2.2.).

Nach dem Lemma (111) muß für $f_\alpha\circ\psi_\alpha \in C^\infty(\hat\Omega_\alpha\cap\hat\Omega_\varkappa)$, $\varkappa \neq \alpha \in Z$, folgendes gelten:

$$f_\alpha(x_\alpha) = f_\varkappa(\psi_\varkappa(\psi_\alpha^{-1}(x_\alpha))), \quad x_\alpha \in \psi_\alpha(\hat\Omega_\alpha\cap\hat\Omega_\varkappa).$$

[illegible] die Funktionen $\psi_\varkappa\circ\psi_\alpha^{-1}$, $\alpha \in$ [illegible], [illegible]

$$\psi_\varkappa\circ\psi_\lambda^{-1}:\ \psi_\lambda(\hat\Omega_\varkappa\cap\hat\Omega_\lambda) \to \psi_\varkappa(\hat\Omega_\varkappa\cap\hat\Omega_\lambda),\ [\text{illegible}] \mapsto [\text{illegible}],\ \text{u.s.w.};$$

$$\psi_\varkappa\circ\psi_{\tilde\varkappa}^{-1}:\ \psi_{\tilde\varkappa}(\hat\Omega_\varkappa\cap\hat\Omega_{\tilde\varkappa}) \to \psi_\varkappa(\hat\Omega_\varkappa\cap\hat\Omega_{\tilde\varkappa}),\ \tilde{x}^j \mapsto (x^j) = \left(\frac{\tilde{x}\tilde{x}-1}{2}, \frac{\tilde{x}\tilde{x}+1}{2}, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3\right)/(\tilde{x}^1-\tilde{x}^0)$$

$$\psi_\varkappa\circ\psi_{\tilde\lambda}^{-1}:\ \psi_{\tilde\lambda}(\hat\Omega_\varkappa\cap\hat\Omega_{\tilde\lambda}) \to \psi_\varkappa(\hat\Omega_\varkappa\cap\hat\Omega_{\tilde\lambda}),\ \tilde{y}^j \mapsto (x^j) = \left(-\frac{\tilde{y}\tilde{y}-1}{2}, \frac{\tilde{y}\tilde{y}+1}{2}, \tilde{y}^2, \tilde{y}^3\right)/(\tilde{y}^1-\tilde{y}^0).$$

Wir bekommen also auf $\psi_\alpha(\hat\Omega_\varkappa\cap\hat\Omega_\alpha)$ die folgenden Funktionen $f_\alpha(x_\alpha)$:

$$f_\lambda(y) = f_\varkappa(x^j = y^j/y.y)$$

$$f_{\tilde{\varkappa}}(\tilde{x}) = f_\varkappa((x^j) = ((\tilde{x}.\tilde{x}-1)/2, (\tilde{x}.\tilde{x}+1)/2, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)/(\tilde{x}^1-\tilde{x}^0)) \qquad (114)$$

$$f_{\tilde{\lambda}}(\tilde{y}) = f_\varkappa((x^j) = ((-(\tilde{y}.\tilde{y}-1)/2, (\tilde{y}.\tilde{y}+1)/2, \tilde{y}^2, \tilde{y}^3)/(\tilde{y}^1-\tilde{y}^0)).$$

Die funktionale Gestalt von f_α in den Argumenten x_α sind demnach i.a. anders als die von $f_\varkappa$ in $x_\varkappa \equiv x$. Die auf der obigen Weise erhaltenen Funktionen f_α auf $\Psi_\alpha(\hat{\Omega}_\alpha \cap \hat{\Omega}_\varkappa)$ können auf ganz $\Psi_\alpha(\hat{\Omega}_\alpha)$ fortgesetzt werden, falls $f_\varkappa$ gewisse Limesbedingungen erfüllen. Die Limesbedingungen können wir wie folgt herleiten:

Für $[\xi] \in \hat{\Omega}_\alpha \setminus \hat{\Omega}_\alpha \cap \hat{\Omega}_\varkappa$ gilt für einen beliebigen $\xi \in [\xi]$ einerseits

$$\xi^4 - \xi^5 \equiv \varkappa(\xi) = 0 \text{ und } \begin{cases} \xi^4+\xi^5 = \lambda(\xi) \neq 0 \\ \xi^1-\xi^0 = \tilde{\varkappa}(\xi) \neq 0 \\ \xi^1+\xi^0 = \tilde{\lambda}(\xi) \neq 0 \end{cases} \text{ für } \alpha = \begin{cases} \lambda \\ \tilde{\varkappa} \\ \tilde{\lambda} \end{cases},$$

andererseits wissen wir

$$\varkappa(\xi) = \begin{cases} y^j y_j \cdot \lambda(\xi) \\ (\tilde{x}^1-\tilde{x}^0) \cdot \tilde{\varkappa}(\xi) \\ (\tilde{y}^1-\tilde{y}^0) \cdot \tilde{\lambda}(\xi) \end{cases} \text{ für } \alpha = \begin{cases} \lambda \\ \tilde{\varkappa} \\ \tilde{\lambda} \end{cases} \text{ und } \begin{cases} y^j = \xi^j/\lambda(\xi), \ j=0,1,2,3 \\ x^j = \xi^j/\tilde{\varkappa}(\xi), \\ y^j = \xi^j/\tilde{\lambda}(\xi) \end{cases} j=5,4,3,2.$$

Eine stetig differenzierbare Fortsetzung der Funktion f_α von $\Psi_\alpha(\hat{\Omega}_\alpha \cap \hat{\Omega}_\varkappa)$ auf ganz $\Psi_\alpha(\hat{\Omega}_\alpha)$ ist daher gesichert, falls

$$\lim_{y.y \to 0} f_\varkappa((x^j)=(y^j)) \quad \text{in} \quad \Omega_\lambda \setminus \Psi_\lambda(\hat{\Omega}_\lambda \cap \hat{\Omega}_\varkappa) \qquad (115)$$

und $\lim_{(\tilde{x}^1-\tilde{x}^0) \to 0} f_\varkappa((x^j)=(\tilde{x}^j)) \quad \text{in} \quad \Omega_{\tilde{\varkappa}} \setminus \Psi_{\tilde{\varkappa}}(\hat{\Omega}_{\tilde{\varkappa}} \cap \hat{\Omega}_\varkappa)$

und $\lim_{(\tilde{y}^1-\tilde{y}^0) \to 0} f_\varkappa((x^j)=(\tilde{y}^j)) \quad \text{in} \quad \Omega_{\tilde{\lambda}} \setminus \Psi_{\tilde{\lambda}}(\hat{\Omega}_{\tilde{\lambda}} \cap \hat{\Omega}_\varkappa)$

existieren und stetig differenzierbar an die Werte in $\Psi_\alpha(\hat{\Omega}_\alpha \cap \hat{\Omega}_\varkappa)$ angeschlossen werden können. Umgekehrt ist die Notwendigkeit obiger Forderungen für die Fortsetzbarkeit von f_α ersichtlich, da die drei Funktionen f_α, die man aus der Gl.(114) bekommt, i.a. verschieden sind, mithin sind die Limiten i.a. ebenfalls verschieden. Um das entsprechende Beispiel aufzusuchen, ist es naheliegend, solche $f_\varkappa$ zu betrachten, welche die Größen (x^1+x^0), (x^1-x^0) etc. als einen Teil ihrer Argumente besitzen. (Vgl.Ref.[29]).

5.2.2. Die Ableitung des Operators auf M_c^4.

Nehmen wir an, daß $f_\varkappa$ auf ganz M_c^4 fortsetzbar ist. Nachdem die Existenz von $f \in C^\infty(M_c^4)$ geregelt ist, wenden wir uns dem

Problem des Differentialoperators zu. Nach dem Lemma (49) wissen wir, daß

$$\varkappa \frac{\partial}{\partial \eta^i} + 2\,\eta_i \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

ein Vektorfeld aus $\mathfrak{T}(M_c^4)$ ist. Mithin ist es nach der Bemerkung nach der Definition (112) ein Differentialoperator auf $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}$. Da die Komposition von Differentialoperatoren wieder ein Differentialoperator ist, ist

$$\hat{P}_\varkappa := \sum_{i=0}^{3} g_{ii} \left(\varkappa \frac{\partial}{\partial \eta^i} + 2\eta_i \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)\left(\varkappa \frac{\partial}{\partial \eta^i} + 2\eta_i \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \qquad (116)$$

[illegible] definierter Differentialoperator. Mittels der Rechenregel $\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X$ für $X_i \in \mathfrak{T}(M)$, $Y_i \in \mathfrak{T}(M)$ und $\phi : M \to M$,

$$(Y_1(Y_2 f))\circ\phi = X_1(Y_2 f\circ\phi) = X_1(X_2(f\circ\phi)) \,, \quad Y_i = \phi_* X_i \,,$$

erhalten wir für $\hat{P}_\varkappa$ die folgende Relation

$$\begin{aligned}
&\left(\varkappa \frac{\partial}{\partial \eta^i} + 2\eta_i \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)\left(\varkappa \frac{\partial}{\partial \eta^i} + 2\eta_i \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) f_\varkappa \circ (\psi_\varkappa \circ \hat{\pi}_\varkappa) \\
&= \left(\varkappa \frac{\partial}{\partial \eta^i} + 2\eta_i \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)\left(\varkappa \frac{\partial}{\partial \eta^i} + 2\eta_i \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) f_\alpha \circ (\psi_\alpha \circ \hat{\pi}_\alpha) \\
&= \left(\left(\psi_\alpha \circ \hat{\pi}_\alpha \circ \hat{\pi}_\varkappa\right)_* \left(\varkappa \frac{\partial}{\partial \eta^i} + 2\eta_i \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)\left(\psi_\alpha \circ \hat{\pi}_\alpha\right)_* \left(\varkappa \frac{\partial}{\partial \eta^i} + 2\eta_i \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) f_\alpha\right) \circ (\psi_\alpha \circ \hat{\pi}_\alpha) \,, \\
&= P_\varkappa^{(\alpha)} f_\alpha \circ (\psi_\alpha \circ \hat{\pi}_\alpha) \,,
\end{aligned}$$

wobei man in der 2. Zeile die Gültigkeit von

$$f_\varkappa \circ (\psi_\varkappa \circ \hat{\pi}_\varkappa) = f = f_\alpha \circ (\psi_\alpha \circ \hat{\pi}_\alpha) \quad \text{in } \hat{N}_\varkappa^5 \cap \hat{N}_\alpha^5$$

angenommen hat. Für $\alpha = \varkappa$ bekommt man dann mit Hilfe der Gl.(44) aus der Gl.(117) den Differentialoperator

$$P_\varkappa^{(\varkappa)} = \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x_k} \,.$$

Der Operator $\hat{P}_\varkappa$ ist daher der Operator im M_c^4, der in dem lokalen Koordinaten $K_1^4(\varkappa) = \mathcal{M}^4$ dem masselosen Klein-Gordon-Operator entspricht. In den anderen lokalen Koordinaten nimmt der Operator $\hat{P}_\varkappa$ die folgenden Gestalten an:

$$\begin{aligned}
P_\varkappa^{(\lambda)} &= (y.y)^2 \partial_i \partial^i - 4(y.y) y^k \frac{\partial}{\partial y^k} \,, \\
P_\varkappa^{(\tilde{\varkappa})} &= (\tilde{y}^1 - \tilde{y}^0)^2 \tilde{\partial}_i \tilde{\partial}^i + 2(\tilde{y}^1 - \tilde{y}^0)(\tilde{\partial}_0 + \tilde{\partial}_1) \,, \\
P_\varkappa^{(\tilde{\lambda})} &= (\tilde{y}^1 - \tilde{y}^0)^2 \tilde{\partial}_j \tilde{\partial}^j + 2(\tilde{y}^1 - \tilde{y}^0)(\tilde{\partial}_0 + \tilde{\partial}_1)
\end{aligned}$$

Die repräsentieren also die Operatoren im $K_1^4(\alpha)$, die dem Klein-Gordon-Operator im $K_1^4(\varkappa) = M^4$ entsprechen.

Die ganze Prozedur muß davon unabhängig sein, von welcher Karte man ausgeht. Denn man den Operator $P_\varkappa^{(\alpha)}$ als Ausgangsoperator im Raum $K_1^4(\alpha) = \Omega_\alpha$ verwendet, dann bekommt man

$$\hat{P}_\lambda = g_{ij}(\varkappa\lambda)^2(\lambda\partial_i + \eta_i\partial_{\varkappa\lambda})(\lambda\partial_j + \eta_j\partial_{\varkappa\lambda}) + 4\varkappa(\lambda\partial_\lambda - \varkappa\partial_{\varkappa\lambda})/\lambda$$

$$\hat{P}_{\tilde{\varkappa}} = g_{kk}(\varkappa\tilde{\varkappa})^2(\tilde{\varkappa}\partial_k + \tilde{\eta}_k\partial_{\varkappa\tilde{\varkappa}})(\tilde{\varkappa}\partial_k + \tilde{\eta}_k\partial_{\varkappa\tilde{\varkappa}}) + 4\varkappa(\tilde{\varkappa}\partial_{\tilde{\varkappa}} - \varkappa\partial_{\varkappa\tilde{\varkappa}})\tilde{\varkappa}$$

$$\hat{P}_{\tilde{\lambda}} = g_{ij}(\varkappa\tilde{\lambda})^2(\tilde{\lambda}\partial_i + \tilde{\eta}_i\partial_{\varkappa\tilde{\lambda}})(\tilde{\lambda}\partial_j + \tilde{\eta}_j\partial_{\varkappa\tilde{\lambda}}) + 4\varkappa(\tilde{\lambda}\partial_{\tilde{\lambda}} - \varkappa\partial_{\varkappa\tilde{\lambda}})\tilde{\lambda}$$

Nach der allgemeinen Theorie muß aber ein einziger Operator P auf $\mathcal{M}_c^+$ vorzufinden sein. Um $\hat{\Gamma}_\alpha$, $\alpha \in I$, in die gleiche Form zu bringen, verfahren wir wie folgt: Wir wußten, daß $\{\hat{s}_i,\ i=1,2,3\}$ aus 4.4.3. eine Basis der Λ-invarianten Vektorfelder auf $\mathcal{M}_c^+$ darstellen und daß $\hat{\pi}_*(\hat{s}_i)=0$ auf $\mathcal{M}_c^+ = \hat{\pi}(\mathcal{M}_c^+)$ ist. $\hat{\pi}_*\hat{s}_i$, $i=1,\dots,4$, bilden somit eine Basis auf $T(\mathcal{M}_c^+)$. Wir drücken daher die Λ-invarianten Vektorfelder aus $\hat{\Gamma}(\mathcal{M}_c^+) \subset \mathcal{T}(\mathcal{M}_c^+)$, die nach dem Lemma (4.8) zugleich Elemente von $\mathcal{T}(\mathcal{M}_c^+)$ darstellen, durch $\hat{s}_1,\dots,\hat{s}_4$ aus. Nach einigen Rechnungen erhalten wir dann schließlich

$$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_\alpha = \varkappa^2(\hat{s}_4\hat{s}_4 - \sum_{i=1}^{3}\hat{s}_i\hat{s}_i)N + 2\varkappa(-\eta^3\hat{s}_1 + \eta^2\hat{s}_2 + \eta^1\hat{s}_3 + \eta^0\hat{s}_4)N,$$

wobei $\eta := (\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3)$ und $\alpha \in I$ sind. Man kann $\hat{\Gamma}$ weiter vereinfachen zu

$$\hat{\Gamma} = \varkappa^2 g_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu + 4\varkappa\partial_\lambda + (\varkappa^2(\sum_{i=1}^{3}\eta^i\partial_i - \eta^0\partial_0 - \eta^5\partial_5) - 2\varkappa\eta^5)\hat{s}_5 N.$$

Da wir $\hat{\Gamma}$ als Differentialoperator in $\mathcal{T}(\mathcal{M}_c^+)$ betrachten wollen, können wir den letzten Term, der $\hat{s}_5$ enthält, weglassen. Der Operator

$$\hat{\Gamma} = \varkappa^2 g_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu + 4\varkappa\partial_\lambda \qquad (g : \text{Metrik aus Gl.(54)})$$

ist somit der zu dem masselosen Klein-Gordon-Operator im Minkowskiraum entsprechende Operator auf $\mathcal{M}_c^+$.

Literatur

1. Kastrup H.A.: Annalen der Physik 9, 388 (1962) und die dortige umfangreiche Liste der diesbezüglichen relevanten früheren Arbeiten anderer Autoren.

2. Zumino B.: Rapporteur's talk in "Proceeding of the XV International Conference on High Energy Physics", Kiev, (1970).

3. "Proceedings of the Coral Gables Conference", (1971), wird voraussichtlich.

4. Gell-Mann M.: Hawaii Lectures, Calt-68-244, (1969).
Mack G. and Salam A.: (s.Ref.15).
Carruthers P.: Calt-68-265; Physics Reports 1, 1, (1971).
Korthals Altes C.P.: Univ.Oxford Preprints, Ref.2/71, 16/71.
Schroer B.: Univ.Pittsburgh Preprint, NYO-3829-56 (1970).

5. Aber die 4-Fermionen-Wechselwirkung und die ϕ^2-Wechselwirkung sind nicht konform-invariant, auch für masselosen Teilchen.

6. Mack G.: Nuclear Phys. B5, 499 (1968) und die dortigen Referenzen

7. Wilson K.: Phys. Rev. 179, 1499 (1969).

8. [illegible] Y.: Phys. Rev. Letters 25, 966 (1970); "LightCone Expansions and Applications", Weizmann Institute Preprint, WIS-71/7-Ph.

9. Brandt R.: Phys.Rev. D1, 2008 (1970),
Brandt R. und Preparata G.:"Operator Products Near the Light Cone", C.R. Preprint, TH-1208 (1970).

10. Mack G.:"The Scaling Law of Electroproduction as a Consequence of Broken Dilatation Symmetry", Trieste Preprint, IC/70/95.

11. Jarotsky J.J.H.:"Proc. 14th Int.Conf. on High Energy Physics", Vienna, Austria, September 1968, (C.R. Scientific Information Service, Geneva, Switzerland 1968).
Bloom E.D. et al.:"Proc. 14th Int.Conf. on High Energy Physics", Vienna, unpublished (1968).

12. Bjorken J.D.:Phys. Rev. 179, 1547, (1969).

13. Coleman S. und Jackiw R.:MIT Preprint, CTP # 172 (Dez.1970).

14. Kastrup H.A.: Phys.Letters 3, 78, (1962).

15. Mack G. und Salam A.: Ann.Phys. 53, 174, (1969).

16. Wess J., Gross D.J.: Phys. Rev. D2, 753, (1970).

17. Helgason S.:"Differential Geometry and Symmetric Spaces" Academic Press, N.Y. (1962).

18. Wolf J.:"Space of Constant Curvature", Mc. Graw Book Company, N.Y. (1967).

19. Kobayashi S. und Nomizu K.: "Foundations of Differential Geometry" Vol.1, Interscience Publ., N.Y. (1963).

20. Brower R., Weyl H.: Am.J.of Math. 57, 425 (1935).

21. s.Ref. 17, S.203.

22. Dabei haben wir stillschweigend die Basis geändert: $(\eta^0,\eta^1,..,\eta^5) \mapsto (\eta^0,\eta^5,\eta^1,..,\eta^4)$ und dementsprechend
$$g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1_4 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1_2 & \\ & -1_4 \end{pmatrix}$$

23. s.Ref. 17, S. 121.

24. ibid. S.2[illegible], Lh.2.2.(ii).

25. ibid. S.345, Lemma 4.3.

26. s.z.B. Isu Fan: J.of Math.Phys. 12, 315 (1971).

27. s.Ref.1 und Kastrup: Phys.Rev. 142, 1060 (1966); 143, 1021(1966). In der letztgenannter Arbeit wird u.a. die Rolle der Elemente der Lie-Algebra zu $SO_4(c)$ und zu $D_1(\rho)$ im quantenmechanischen Limes diskutiert.

28. zu Definitionen (26) bzw. (27) s.Ref. 17, S.110 bzw.S.112.

29. Mayer D.: Dissertationsarbeit, München, (1971).

30. Vgl. den vorigen Abschnitt 2.3.2.. Die differenzierbare Wirkung der unten erwähnten Gruppe auf den entsprechenden Mannigfaltigkeiten ist leicht einzusehen.

31. s.Ref.19, S.50.

32. s.Ref.19, S.53 und Husenmoller D.: "Fiberbundles", Mc.Graw Hill Book Company, N.Y. (1966), S.71, Def.2.1..

33. s.z.B.
Fulton T., Rohrlich R. und Wittin L.: Nuovo Cimento 26, 652 (62)
Tugov I.I.: Ann. Inst. Henri Poincaré, A, XI, n°2,207,(1969).
Laue H.: Nuovo Cimento 3B, 55 (1971).

34. Barut A.O. und Haugen R.B.: "Theory of the Conformally Invariant Mass", Preprint der Uni.Colorado, Boulder, (1971).

35. Vgl. dazu Dirac P.A.M.: Annals of Math. 37, 429 (1936).

36. Vgl.Ref.17, S.9: Unsere Diskussionen dürften wegen der Kompaktheit der Untermannigfaltigkeit Q_o^5 in $\mathbb{R}_o^6$ nicht ganz sinnlos sein.

37. Es gilt nämlich der Satz (Ramspott, Vorlesung im WS 67/68, Uni.München):
Sei N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse $k \geq 1$ mit abzählbarer Topologie und M eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Klasse k von N. Dann gibt es zu jeder differenzierbaren Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ der Klasse k eine differenzierbare Funktion $h: N \to \mathbb{R}$ der Klasse k mit $h|_M = f$.

38. s.Ref. 18, S.8.

39. s.Ref. 17, S.94.

40. ibid. S. 112.

41. s.Ref. 1[illegible], S.[illegible]4, [illegible]h.2.4.3..

42. Wess J.: Nuovo Cimento 18, 1086 (1960).

43. Gamba A., Luzzato G.: Nuovo Cimento 33, 1732 (1964).

44. Kastrup H.A.: Phys.Rev. 150, 1183 (1966).

45. Castell L.: Nuclear Phys. B13, 231 (1969).

46. Flato M., Simon J., Sternheimer D.: Ann.Phys. 61, 78 (1970).

47. Zeeman E.C.: J.Math.Phys. 5, 490 (1964).

48. Hörmander L.: "Linear Partial Differential Operators", Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-Göttingen, (1964), S.25.

49. s.Ref. 17, S.24.

Ich danke Herrn Prof. Dr. H.A.Kastrup für die Anregung zu dieser Arbeit, für viele gründliche Diskussionen und für wertvolle Hinweise und Vorschläge.
Herrn Prof.Dr.F.Bopp danke ich für die Möglichkeit, die Arbeit an seinem Lehrstuhl anzufertigen.
Die gute Arbeitsatmosphäre in unserer Gruppe, insbesondere die freundliche und fruchtbare Zusammenarbeit mit Herrn Dipl.Phys. D.Mayer wird mir in Erinnerung bleiben.
Dem Deutschen Akademischen Austauschdienst, der Deutschen Forschungsgemeinschaft und dem Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft danke ich für finanzielle Unterstützung.

Lebenslauf

Am 30. November 1943 wurde ich als Sohn des Kaufmanns Go Ping-ngie und seiner Ehefrau Djie Giok-lien in Surabaja (Indonesien) geboren. In Surabaja besuchte ich von 1949 bis 1955 die Volksschule und von 1955 bis 1961 die Oberschule, wo ich 1961 die Reifeprüfung ablegte.

Im Sommer-Semester 1964 begann ich an der Universität München das Studium der Physik, legte im Winter-Semester 1966/67 die Diplomvorprüfung ab, fertigte unter Leitung von Herrn Prof.Dr.W.Güttinger meine Diplom-Arbeit an und legte im Dezember 1968 die Diplomprüfung ab.

Seit 1969 bin ich Doktorand bei Herrn Prof.Dr.H.A.Kastrup.